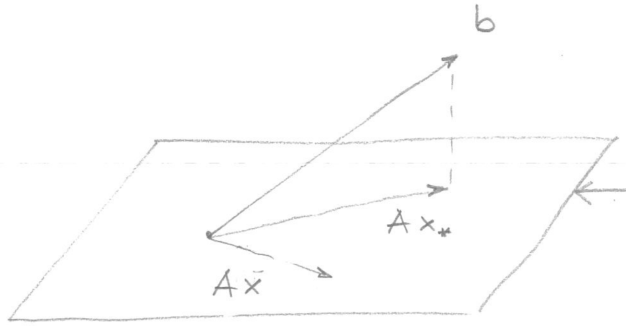
Eq. normali e fatt QR.

Es: $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^3$



piano (spazio) generato dalle colonne di A

$\|Ax-b\|$ è minima $\iff$ Ax proi ort di b sul piano gen dalle colonne di A

$\iff$ $Ax-b \perp$ piano gen dalle colonne di A

$\iff$ $Ax-b \perp$ colonne di A

$\iff$ $A^T(Ax-b) = 0$ $\iff$ $\boxed{A^TAx = A^Tb}$

Equazioni NORMALI

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ax è proi ort di b sul piano gen dalle colonne di A} \\ \iff x \text{ è soluz delle Eq NORM}\end{array}}$$

1) se colonne di A lin indip:

$\exists!$ soluz delle eq.ni normali;

2) se colonne di A lin dip:

$\exists\infty$ soluz delle eq.ni normali.

(infatti: la pr ort di b sul piano... e' UNICA e se colonne lin indip $\exists!$ comb lin che la genera, altrimenti...)

<u>def</u> (fatt QR, caso rettangolare):

$A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ a colonne lin indip;

U, T fatt QR di A se

- $U \in \mathbb{R}^{n \times k}$ a colonne ortonormali ($U^T U = I$)
- $T \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tr sup
- $UT = A$

- $A = UT \Rightarrow A^TA = T^TU^TUT = T^TT$

$$A^Tb = T^TU^Tb$$

q.di $\quad A^TAx = A^Tb \sim T^TTx = T^TU^Tb$

<u>MA</u> $\quad T$ invert (infatti...) $\Rightarrow T^T$ invert

q.di: $\quad \boxed{A^TAx = A^Tb \sim Tx = U^Tb}$

caso semplice!

Inoltre: $\quad c(A^TA) = c(T)^2$

ovvero il sistema $Tx = U^Tb$ ha proprieta' di condizionamento migliori del sistema $A^TAx = A^Tb$!