$$\boxed{\text{TEO: Il m. it def da } H \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } c \in \mathbb{R}^n \text{ è convergente} \iff \rho(H) < 1.}$$

RAGGIO SPETTRALE di H

$= \max \{ |\lambda|, \ \lambda \in \sigma(H) \}$

SPETTRO di H

$= \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \det(H - \lambda I) = 0 \}$

<u>dim</u> (casi particolari)

$Ax = b$, A invert, $\exists! \, x^*$ t.c. $Ax^* = b$

H, c t.c. $(I - H)x = c \sim Ax = b$, ovvero

$(I - H)x^* = c$; <u>se</u> $x_k \to x^*$, $x_k - x^* \to 0$

e viceversa. Ma

$$x_{k+1} = Hx_k + c \iff x_{k+1} = Hx_k + x^* - Hx^*$$

$$\iff x_{k+1} - x^* = H(x_k - x^*)$$

ovvero, posto $e_k = x_k - x^*$: $\boxed{e_{k+1} = H e_k}$

iteraz per l'errore e_k

caso H diagonale: $H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, λ_1, λ_2 autov

$$e_k = H^k e_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} e_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^k e_{01} \\ \lambda_2^k e_{02} \end{pmatrix}$$

- $\forall e_{01} \in \mathbb{R}, \ \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k e_{01} = 0 \iff |\lambda_1| < 1$
- $\forall e_{02} \in \mathbb{R}, \ \lim_{k\to\infty} \lambda_2^k e_{02} = 0 \iff |\lambda_2| < 1$

equivalenti a: $\rho(H) < 1$

caso H diagonalizzabile: $H = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^{-1}$,

λ_1, λ_2 autoval

posto $e'_k = V^{-1} e_k$ (ovvero $e_k = V e'_k$):

$$e'_k = V^{-1} H^k e_0 = V^{-1} V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} V^{-1} e_0$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} e'_0$$

- dal caso precedente: $\forall e'_0, \ \lim_{k\to\infty} e'_k = 0$

$$\iff \rho(H) < 1$$

inoltre: $\lim_{k\to\infty} e_k = 0 \iff \lim_{k\to\infty} e'_k = 0$.

Metodo di JACOBI

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ < invertibile / $\boxed{\text{con } a_{kk} \neq 0}$, $b \in \mathbb{R}^n$

- $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) + M$

$$Ax = b \sim \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})\, x = -Mx + b$$

$$\sim x = \underbrace{-\mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})^{-1} M}_{H_J} x + \underbrace{\mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})^{-1} b}_{c_J}$$

è il m. it def da H_J e c_J.

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

A è PDF $\Rightarrow \det A \neq 0$

- $H_J = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $c_J = \frac{1}{3} b$

- calcolo raggio spettr di H_J

$$p(\lambda) = \det(H_J - \lambda I) = (-\lambda)^2\left[(-\lambda)^2 - \frac{1}{9}\right] =$$

$$= (-\lambda)^2\left(-\lambda + \frac{1}{3}\right)\left(-\lambda - \frac{1}{3}\right)$$

$\Rightarrow$ SPETTRO $\sigma(H_J) = \left\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

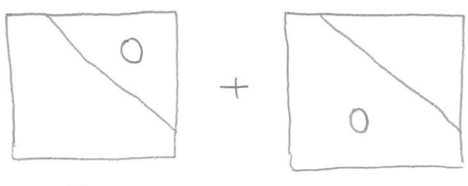
$\Rightarrow$ RAGGIO SPETTRALE $\boxed{\rho(H_J) = \frac{1}{3}}$.

il m. it di Jacobi è convergente

Metodo di GAUSS-SEIDEL

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ < invertibili, $\boxed{a_{kk} \neq 0}$, $b \in \mathbb{R}^n$

- A =



P — la parte tr inf di A

A − P — la parte strettam tr sup di A

$$Ax = b \sim Px + (A-P)x = b$$

$$\sim Px = (P-A)x + b$$

$$\sim \quad x = \underbrace{P^{-1}(P-A)}_{= I - P^{-1}A = H_{GS}} x + P^{-1}b \longrightarrow c_{GS}$$

è il m. it def da H_{GS} e c_{GS}.

Es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $P - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 1/3 & 0 & 0 \\ -1/9 & 0 & 1/3 & 0 \\ -1/9 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$; $H_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2/9 \\ 0 & 0 & 0 & -2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \sigma(H_{GS}) = \left\{0, \frac{1}{9}\right\} \Rightarrow \boxed{\rho(H_{GS}) = \frac{1}{9}}$$

il m. it di Gauss-Seidel è converg

Oss: In generale

$$\boxed{\text{costo} \quad P^{-1}(P-A)\,x_k} \;>\; \boxed{\begin{array}{l}\text{costo soluz} \\ P\,x_{k+1} = (P-A)\,x_k + b\end{array}}$$

$\sim 2n^2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\sim n^2$

$\Rightarrow$ ad ogni iterazione è più economico risolvere il sist (con matr tr inf) che fare il prodotto...

- Velocità di convergenza

Oss: costo del calcolo di x_k (appross di x_* suggerita da un m. it):

$$k \cdot (\text{costo singola iterazione})$$

$\Rightarrow$ tra due metodi it (convergenti!) e' più economico utilizzare quello che, a parità di precisione dell'approssimazione, garantisca un numero di iterazioni inferiore.

Es: $H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, con $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2|$;

$$e_k = H^k e_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} e_0 \quad \text{da cui}$$

$$\| e_k \| = \sqrt{(\lambda_1^k e_{01})^2 + (\lambda_2^k e_{02})^2} = \quad \boxed{\text{ip: } e_{01} \neq 0}$$

$$= |\lambda_1|^k |e_{01}| \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} \left(\frac{e_{02}}{e_{01}}\right)^2}$$

dunque: $\lim_{k \to \infty} \frac{\| e_k \|}{(\rho(H))^k} = |e_{01}|$ $\neq 0$ $\quad \boxed{\rho(H) = |\lambda_1|}$

ovvero: $\boxed{\| e_k \| \approx |e_{01}| (\rho(H))^k}$

Oss: Se fosse $e_{01} = 0$ (e $e_{02} \neq 0$) la succes. tenderebbe a 0 PIÙ RAPIDAMENTE, ma salvo clamorosi colpi di fortuna...

Es: H diagonalizz.: $H = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^{-1}$

con $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2|$

posto $e'_k = V^{-1} e_k$ (ovvero $e_k = V e'_k$):

$$e'_k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} e'_0$$

Dall' Es precedente, SE $e'_{01} \neq 0$:

$$\| e'_k \| \approx |e'_{01}| (\rho(H))^k$$

Inoltre: $\| e_k \| = \| V e'_k \| \leq \max \| V \text{ vers}(e'_k) \| \cdot \| e'_k \|$

$$= \| V \| \; \| e'_k \|$$

e: $\| e'_k \| \leq \| V^{-1} \| \; \| e_k \|$

$$\Rightarrow \| e_k \| \geq \frac{1}{\| V^{-1} \|} \| e'_k \|$$

Q.di: $$\frac{1}{\| V^{-1} \|} \| e'_k \| \leq \| e_k \| \leq \| V \| \; \| e'_k \|$$

$$\Rightarrow \frac{|e'_{01}|}{\| V^{-1} \|} (\rho(H))^k \lesssim \| e_k \| \lesssim \| V \| \; |e'_{01}| \, (\rho(H))^k$$

$$\boxed{\| e_k \| \approx C (\rho(H))^k}$$

- La rapidità di convergenza della successione è determinata dal <u>raggio spettrale di H</u>.