

* METODI ITERATIVI PER SISTEMI LINEARI *

dati: $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$

- $x_0 = \gamma$

- per $k=1,2,\dots$ ripeti: $x_k = Hx_{k-1} + c$

uscita: quando un opportuno criterio di arresto è verificato, x_k .

Obs: È il m. it ad un pts def della funzione

$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $h(x) = Hx + c$. Questa f

è CONTINUA e q.d.: SE la successione generata dal m. it è convergente a $v \in \mathbb{R}^n$, v

è PUNTO UNITO di h , ovvero: $v = Hv + c$.

Il m. it def da H e c approssima le soluzioni del sistema: $(I-H)x = c$

- Se si vuole appross la soluz del sistema $Ax = b$, occorre che i sist $Ax = b$ e $(I-H)x = c$ siano EQUIVALENTI. In part: $\det(I-H) \neq 0$.

- Per ottenere le soluz, occorre trovare successi CONVERGENTI ovvero, note H e c , valori iniziali γ che garantiscono la convergenza.

Es. $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $b = 0$;

$H = I - A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $c = b$ } $\left. \begin{array}{l} \text{I sistemi} \\ Ax = b \text{ e} \\ (I - H)x = c \end{array} \right\}$ sono equiv!

- Scelto $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, si ha:

$$x_0 = \gamma, \quad x_1 = Hx_0 + c = H\gamma, \quad x_2 = Hx_1 + c = H^2\gamma$$

$$\dots \quad x_k = H^k \gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 / 2^k \\ 2^k \gamma_2 \end{bmatrix}$$

- la successi x_k è convergenti $\Leftrightarrow \gamma_2 = 0$

e, in tal caso, il lim è la soluz...

→ la successi converge solo per γ particolari!

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = 0$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• $A = 2I + J$, $(2I + J)x = b \sim 2x = -Jx + b$

$\sim x = -\frac{1}{2}Jx + \frac{1}{2}b \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \frac{1}{2}b$

• H è diagonalizzabile: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

• scelto $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, e'

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \gamma$$

e $\forall \gamma_1, \gamma_2$ si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$.

ovvero: la successione converge per ogni γ !

def (Metodo convergente): \exists il m it def da
 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $c \in \mathbb{R}^n$ è CONVERGENTE se
 $\forall \gamma \in \mathbb{R}^n$ la success x_k generata dal m
è convergente $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ è indep da γ

Om: confronto con il caso NON LINEARE:

in tal caso la situazione buona usuale è
quella di CONVERGENZA LOCALE...