* METODI DIRETTI IN $F(\beta,m)$ *

operando in $\mathbb{R}$	operando in $F(\beta,m)$
① $(S,D,P) = EGP(A)$	① $(\hat S, \hat D, \hat P) = \widehat{EGP}(\hat A)$
② $c = SA(S, Pb)$	② $\hat c = \widehat{SA}(\hat S, \hat P \hat b)$
③ $x_* = SI(D,c)$	③ $\hat x = \widehat{SI}(\hat D, \hat c)$

Oss: le procedure $\widehat{EGP}$ e $\widehat{SA}$ operano con dati $\hat A$, $\hat b$ potenzialmente diversi dai corrisp A, b. Infatti qualche elem di A e b potrebbe non essere in $F(\beta,m)$.

Supponiamo: $\hat A = rd(A)$, $\hat b = rd(b)$.

- $\hat a_{ij} = rd(a_{ij}) = a_{ij}(1+\varepsilon_{ij})$ con $|\varepsilon_{ij}| \le u$

$\Rightarrow \hat A = A + E$, $e_{ij} = a_{ij}\varepsilon_{ij} \Rightarrow \boxed{\|E\| \le nu\|A\|}$

- $\forall v$ t.c. $\|v\| = 1$, $\|Ev\| = \|e_1 v_1 + \dots + e_n v_n\|$

$\le |v_1|\,\|e_1\| + \dots + |v_n|\,\|e_n\| \le \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$

$\Rightarrow \|E\| \le \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$

- $\forall v$ t.c. $\|v\| = 1$, $\|E\| \ge \|Ev\|$

in part. $\|E\| \ge \|E(\text{k-esimo elem base con } \mathbb{R}^n)\|$

$= \|e_k\|$

- $\hat{b}_j = rd(b_j) = b_j(1+\varepsilon_j)$ con $|\varepsilon_j| \leq u$

$\Rightarrow \hat{b} = b + f$, $f_j = b_j \varepsilon_j \Rightarrow \boxed{\|f\| \leq u \|b\|}$

- Consideriamo il sist $\hat{A} x = \hat{b}$, ovvero

$$(A+E)x = b+f$$

Per quanto detto sopra: $\boxed{\alpha = nu}$

Se $\hat{A}$ invert. (ragionevole vista $\|E\|$), detta $\hat{x}$ <u>la</u> soluz di $\hat{A}x = \hat{b}$, si ha:

<u>SE</u> $\alpha\, c(A) < \frac{1}{10}$

<u>ALLORA</u> $$\frac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq 2\alpha\, c(A) = 2nu\, c(A)$$

Operando in $F(\beta, m)$ NON È RAGIONEVOLE aspettarsi ris migliori di

$$\frac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq 2nu\, c(A)$$

Si è detto che, operando in $\mathbb{R}$, il procedim per la ricerca della soluz di un sist di eq lin basato su EGP è soddisfacente.

Questo NON È VERO operando in $F(\beta, m)$!

Es: $A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\gamma \in (0,1)$, $b \in \mathbb{R}^2$

- $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{bmatrix}$; $\|A\| \leq \sqrt{1+\gamma^2} + 1$,

  $\|A^{-1}\| \leq \sqrt{1+\gamma^2} + 1 \Rightarrow \forall \gamma,\ c(A) < (1+\sqrt{2})^2 < 6$

  Il sist da studiare ha BUONE proprietà di condizionamento.

- Operiamo in $F(\beta, m)$ supponendo che:

  (1) $\hat{A} = A$, $\hat{b} = b$ (i dati sono in $F(\beta, m)$)

  (2) $\widehat{EGP}(A) = (S, D, P)$ (la fatt LR è esatta)

  (3) $\widehat{SA}(S, Pb) = \hat{c} \neq c$ con $\|\hat{c} - c\| < u \|c\|$
  (è come se $\hat{c} = rd(c)$: non è ragionevole sperare qualcosa di meglio...)

  (4) $\widehat{SI}(D, \hat{c}) = SI(D, \hat{c})$ (la procedura $\widehat{SI}$ opera "senza errori")

... nonostante tutto questo, l'errore

$$\frac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|}$$ <u>PUÓ</u> essere GRANDE :

$$\|D\| = \max \sqrt{(\gamma c + s)^2 + \left(\frac{s}{\gamma}\right)^2} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} \quad (c = 0,\ s = 1)$$

$$\min \sqrt{(\gamma c + s)^2 + \left(\frac{s}{\gamma}\right)^2} \leq \sqrt{\gamma^2} \quad (c = 1,\ s = 0)$$

$$\Rightarrow \quad c(D) = \|D\|\,\|D^{-1}\| \geq \frac{1}{\gamma}\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \to 0} +\infty$$

L'unico errore imputabile al computer ($\hat{c} \neq c$) è molto piccolo (≈ precis. di macchina) <u>MA</u> l'errore sulla soluzione può essere (in ~~effetti~~ è, per qualche b) molto grande poiché $c(D) \gg 1$.

- <u>Rimedio</u> : EGPP

PP ← Pivoting Parziale: si usa come pivot al passo k l'elemento

$$\max_{i \geq k} |a_{ik}^{(k)}|$$

elem di max modulo in