- valori delle c_k noti solo con approssimazione: $|\delta c_k| < 1$

$\Rightarrow$ perturbazione dati: $E = \begin{bmatrix} \delta c_1 + \delta c_2 & -\delta c_2 \\ -\delta c_2 & \delta c_2 + \delta c_3 \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 \\ h\,\delta c_3 \end{bmatrix}$

$$\frac{\|E\|_1}{\|A\|_1} \leq \frac{3}{300} = 10^{-2} \; ; \qquad \frac{\|f\|_1}{\|b\|_1} \leq \frac{5}{519} < 10^{-2}$$

$= \alpha$

- $\alpha\, c_1(A) < \frac{1}{10} \qquad (c_1(A) = 3)$

- $\hat{z}$ soluzione con $\hat{c}_k$ t.c. $|c_k - \hat{c}_k| < 1 \ldots$

Teo condiz $\Rightarrow \dfrac{\|\hat{z} - z^*\|_1}{\|z^*\|_1} \leq 2\alpha\, c_1(A) = 6 \cdot 10^{-2}$

Es: stessa struttura ed ep dell' Es precedente.

- $\hat{z} \in \mathbb{R}^2$ soluzione approssimata, calcolata ad es con una procedura che realizza uno dei procedim visti (usando ~~fatt~~ LR o QR);

- def (residuo): $\underbrace{r = A\hat{z} - b}_{}$ (RESIDUO)

  $\neq 0$ a meno che $\hat{z}$ soluzione esatta!

- $\boxed{\hat{z} \text{ è SOLUZIONE ESATTA del SISTEMA PERTURBATO } \quad Az = b + r}$

se $\quad \alpha\, c(A) < \frac{1}{10}$ allora

Teo condiz $\Rightarrow \quad \frac{\|\hat{z} - z_*\|}{\|z_*\|} \leq 2\alpha\, c(A)$

Pb: $\exists\ \delta g,\ \delta c_k,\ \delta m_k,\ \delta h$ t.c. $E = 0,\ f = r$?

Oss: il risultato precedente è COMUNQUE VALIDO: il sist perturbato NON deve necessariamente essere significativo!!

Sol: Sì, ad es quelle determ da:

$\delta c_k = 0,\ \delta g = 0,\ \delta h = 0$

e $\quad \delta m_1 \cdot g = r_1 \ ; \quad \delta m_2 \cdot g = r_2$

- Sia $N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matrice t.c. $\quad N\hat{z} = -r$

Allora: $\hat{z}$ è SOLUZIONE ESATTA del sist PERTURB:

$$(A+N)\,z = b$$

Oss: se $\hat{z} = 0$ e $r \neq 0$ nessuna matrice verifica; se $\hat{z} \neq 0$ allora: $N = -\frac{r\hat{z}^T}{\hat{z}^T\hat{z}}$ è UNA matrice che verifica...

- $\alpha = \frac{\|N\|}{\|A\|}$, $\quad c(A)$ numero di condiz di A;

<u>se</u> $\alpha\, c(A) < \frac{1}{10}$ <u>allora</u>

Teo condiz $\Rightarrow \dfrac{\|\hat{z} - z_*\|}{\|z_*\|} \leq 2\alpha\, c(A)$

<u>Pb</u>: $\exists\ \delta g,\ \delta c_k,\ \delta m_k,\ \delta h$ t.c. $E = N,\ f = 0$?

<u>Es</u>: $\hat{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3{,}5 \end{bmatrix}$, $N = \mathrm{diag}(n_{11}, n_{22})$,

$$r = A\hat{z} - b = \begin{bmatrix} 50 \\ 500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9{,}81 \\ 9{,}81 + 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40{,}19 \\ -9{,}81 \end{bmatrix}$$

$$N\hat{z} = -r \iff \begin{cases} 2\, n_{11} = -40{,}19 \\ 3{,}5\, n_{22} = 9{,}81 \end{cases}$$

$$\iff \begin{matrix} n_{11} = -20{,}095 \\ n_{22} = 2{,}80\ldots \end{matrix}$$

- $\hat{z}$ soluz esatta di $(A+N)z = b$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\|N\|_1}{\|A\|_1} = \frac{20{,}095}{300} \simeq 6{,}7 \cdot 10^{-2} < \frac{1}{10}$$

- Teo condiz $\Rightarrow \dfrac{\|\hat{z} - z_*\|_1}{\|z_*\|_1} \leq 2\alpha\, c_1(A) \simeq 0{,}40$

$\to\ \simeq 6 \cdot 10^{-2}$

- $\delta c_1 = -20{,}095$ N/m, $\delta c_3 = 2{,}80$ N/m, $\delta c_2 = 0$ $\leftarrow$ per avere $E = N$

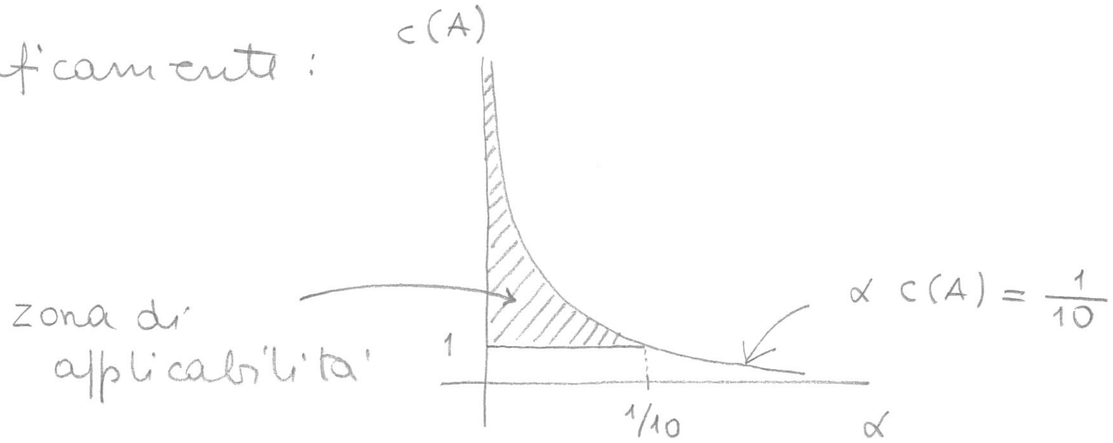
$$\delta m_1 = 0 \quad , \quad \delta g = 0$$

$$\delta m_2 \quad \text{t.c.} \quad \delta m_2 \cdot g + \delta c_3 \cdot h = 0$$

per avere $f = 0$

<u>Oss</u>: Per utilizz il teo condiz occorre che $\alpha \, c(A) < \frac{1}{10}$.

Graficamente:



$$\boxed{\text{... più è GRANDE } c(A) \text{, più PICCOLO deve essere } \alpha \text{ ...}}$$

- $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $c(A) \geq 1$

<u>dim</u>: $\forall B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

se $B = A^{-1}$:

$$\|I\| = \|A A^{-1}\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

$$\hookrightarrow = \max \{ \underbrace{\|Iv\|}_{=\|v\|=1} , \|v\| = 1 \} = 1$$