* CONDIZIONAMENTO *

... del Pb della soluz di un sist di eq lineari.

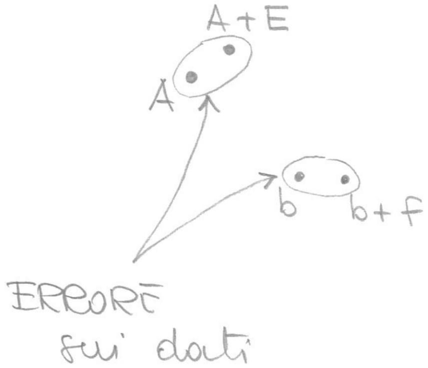
- A invertibile $\in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\exists!\, x_*$ t.c. $Ax_* = b$ (soluzione)

- $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ perturbazione (additiva) di A
  $f \in \mathbb{R}^n$ " " di b

- ip: $A+E$ invertibile ...

  $\Rightarrow \exists!\, \hat{x}$ t.c. $(A+E)\hat{x} = b+f$

- dati / soluzione



> Pb: assegnato un modo di misurare gli errori, determ quanto grande può essere l'err sulla sol in funzione di quanto grande è quello sui dati.

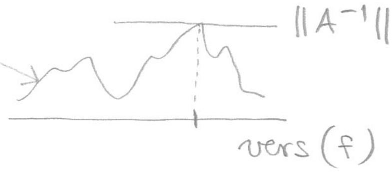
Es: $E = 0$, $f \neq 0$

- x_* t.c $A x_* = b$
- $\hat{x}$ t.c $A\hat{x} = b + f$
- $A(\hat{x} - x_*) = (b+f) - b = f \Rightarrow \boxed{\hat{x} - x_* = A^{-1} f}$
- $\|\hat{x} - x_*\| = \|A^{-1} f\|$ "errore assoluto"

$f = \dfrac{f}{\|f\|}\|f\|$ $\quad \dfrac{f}{\|f\|} =$ vers(f): vettore di norma uno che specifica la <u>direzione</u> di f

$$\Rightarrow \|\hat{x} - x_*\| = \|A^{-1}(\|f\| \,\text{vers}(f))\|$$

$$= \|A^{-1}\text{vers}(f)\| \, \|f\|$$



posto $\|A^{-1}\| \equiv \max\limits_{f \neq 0} \|A^{-1}\text{vers}(f)\|$

$$= \max\{\|A^{-1}v\|, \|v\| = 1\}$$

si ha: $\|\hat{x} - x_*\| \leq \|A^{-1}\| \, \|f\|$

$\boxed{\exists f \text{ t.c. } =}$

- $b \neq 0$ $(\Rightarrow x_* \neq 0)$: $\dfrac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \dfrac{\|f\|}{\|x_*\|}$

"errore relativo"

MA: $A x_* = b \Rightarrow \|b\| = \|A x_*\| \leq \|A\| \, \|x_*\|$

$\|A\| = \max\{\|Av\|, \|v\| = 1\}$

$\boxed{\exists x_* \text{ (ovvero } b) \text{ t.c. } =}$

$$\Rightarrow \frac{\|b\|}{\|x_*\|} \leq \|A\|$$

err relativo su b

quindi: $\dfrac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \dfrac{\|f\|}{\|b\|} \dfrac{\|b\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|A\| \dfrac{\|f\|}{\|b\|}$

<u>def</u> (numero di condizionamento)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile :

$$c(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$ ← NUMERO di CONDIZIONAMENTO <u>di A</u>

(dip dalla norma !)

TEO (di condizionamento)

Siano A, b dati del sistema da risolvere, E, f perturbazioni dei dati, x_*, $\hat{x}$ e α t.c.:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile
- $b \in \mathbb{R}^n$ non zero
- $A x_* = b \quad (x_* \neq 0)$
- $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c. $A + E$ invert
- $f \in \mathbb{R}^n$
- $(A+E)\hat{x} = b + f$

- $\| E \| \leq \alpha \| A \|$, $\| f \| \leq \alpha \| b \|$ (ovvero: α è un limite superiore per la misura delle perturbaz)
- $\alpha \, c(A) < \frac{1}{10}$

Allora: (1) $\dfrac{\| \hat{x} - x_* \|}{\| x_* \|} \leq 2 \alpha \, c(A)$

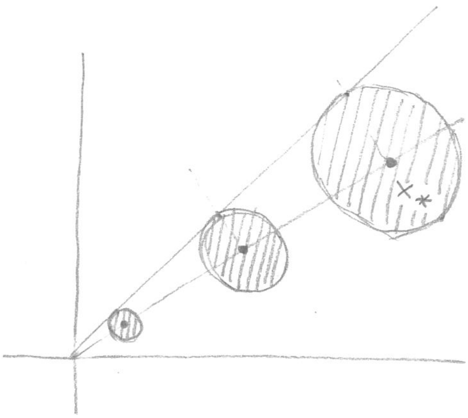
(2) $\exists$ dato b, perturbaz E, f t.c.

$$\frac{\| \hat{x} - x_* \|}{\| x_* \|} = 2 \alpha \, c(A)$$

- **Oss** (su errore relativo "vettoriale")

Siano $x_*, \hat{x}$ t.c. $\dfrac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq \dfrac{1}{10}$ e $\|x_*\| = \gamma > 0$.

In $\mathbb{R}^2$:



$\hat{x} \in$ area a tratteggio
$\left(\text{raggio} = \dfrac{1}{10} \cdot \gamma \ldots\right)$

> **Es**: disegno analogo per $\|\hat{x} - x_*\| \leq \dfrac{1}{10}$

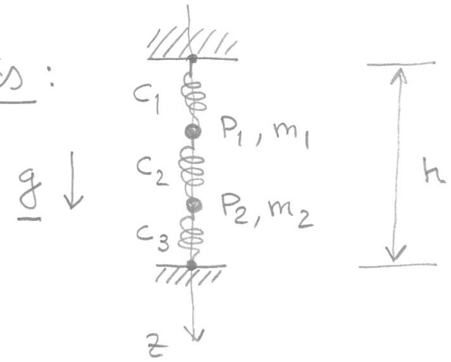
Vediamo l'err rel sulle singole componenti:

$$\frac{|\hat{x}_k - x_k^*|}{|x_k^*|} \leq \frac{\|\hat{x} - x_*\|}{|x_k^*|} \leq \frac{1}{10} \frac{\|x_*\|}{|x_k^*|}$$

ip: $x_k^* \neq 0$ (ma potrebbe essere $=0$: in tal caso l'err rel NON È DEFINITO)

> **Oss**: $v \in \mathbb{R}^n$
>
> $$\frac{\|v\|^2}{|v_k|^2} = \frac{v_1^2 + \cdots + v_n^2}{v_k^2} = 1 + \underbrace{\sum_{j \neq k} \frac{v_j^2}{v_k^2}}_{\geq 0}$$
>
> [e potrebbe essere MOLTO > 0 !!]
>
> > **Es**: Stimare $\dfrac{\|v\|}{|v_k|}$ per $v = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $k = 1, 2$ e $\varepsilon \to 0$

Es:



Eq. statica:

① $m_1 g - c_1 z_1 + c_2 (z_2 - z_1) = 0$

② $m_2 g + c_2 (z_1 - z_2) - c_3 (z_2 - h) = 0$

sistema da studiare: $\underbrace{\boxed{\begin{matrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{matrix}}}_{A} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g + c_3 h \end{bmatrix}}_{b}$

- parametri: $c_1 = c_2 = c_3 = 100$ N/m
  $m_1 = m_2 = 1$ kg
  $g = 9{,}81$ m/s² ; $h = 5$ m

- soluzione: $z_1^* \simeq 1{,}76$ m ; $z_2^* \simeq 3{,}43$ m

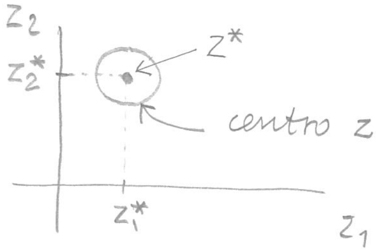
- valore g noto solo con approssimazione: $|\delta g| < 10^{-2}$
  $\Rightarrow$ perturbaz dati: $f = \begin{bmatrix} m_1 \delta g \\ m_2 \delta g \end{bmatrix}$, $E = 0$,

$$\frac{\|f\|}{\|b\|} \simeq \frac{\sqrt{2}}{510} |\delta g| < 2{,}7\ 10^{-5} = \alpha$$

- $c(A) = 3 \Rightarrow \alpha\, c(A) < \frac{1}{10}$

- $\hat{z}$: soluzione con $\hat{g}$ t.c. $|g - \hat{g}| < 10^{-2}$ ...

Teo condiz $\Rightarrow \boxed{\dfrac{\|\hat{z} - z^*\|}{\|z^*\|} \leqslant 2\alpha\, c(A) \simeq 1{,}6\ 10^{-4}}$



centro z^*, raggio $1{,}6\ 10^{-4} \|z\|$, include $\hat{z}$.

(dis NON in scala!)