CN # 28 / 14 aprile 2015 / C33

---

* FATTORIZZAZIONE QR *

def: U, T fatt QR di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ significa

1) $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonale (colonne base o.n di $\mathbb{R}^n$)
2) $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tr superiore
3) $UT = A$

- int geometrica:

  sia U, T una fatt QR di $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

  u_1, u_2, u_3 (colonne di U) sono base o n di $\mathbb{R}^3$ t.c.

  $$(a_1, a_2, a_3) = (u_1, u_2, u_3) \boxed{\begin{matrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{matrix}}$$

  $\Rightarrow$ u_1, a_1 "sono sulla stessa retta",
  u_1, u_2 e a_1, a_2 "sono sullo stesso piano",
  u_1, u_2, u_3 e a_1, a_2, a_3 ...

- determinazione di una fatt QR:

<u>Es</u>: $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^{3\times3}$

<u>Passo 1</u>: si cercano $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ a colonne ortogonali (non necess di norma uno!) e Θ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ t.c. $A = \Omega\Theta$.

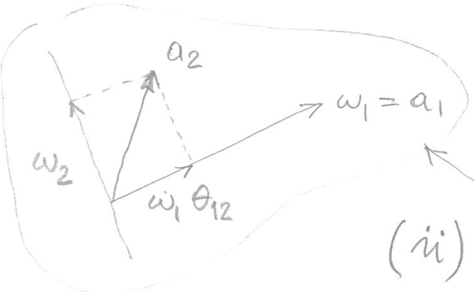
$$(a_1, a_2, a_3) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)\begin{pmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} a_1 = \omega_1 \\ a_2 = \omega_1 \theta_{12} + \omega_2 \\ a_3 = \omega_1 \theta_{13} + \omega_2 \theta_{23} + \omega_3 \end{cases}$$

Eq. 1 $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_1 = a_1}$

Eq. 2 $\Rightarrow$ (i.1) $a_2 \cdot \omega_1 = (\omega_1 \theta_{12} + \omega_2) \cdot \omega_1 =$ $(\omega_2 \cdot \omega_1 = 0!)$

$= \theta_{12}(\omega_1 \cdot \omega_1)$



<u>SE</u> $\omega_1 \neq 0$ <u>ALLORA</u> $\boxed{\theta_{12} = \dfrac{a_2 \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}}$

<u>ALTRIMENTI</u> STOP

(ii) $\boxed{\omega_2 = a_2 - \omega_1 \theta_{12}}$

Eq. 3 $\Rightarrow$ (i.1) $a_3 \cdot \omega_1 = (\omega_1 \theta_{13} + \omega_2 \theta_{23} + \omega_3) \cdot \omega_1 =$

$= \theta_{13}(\omega_1 \cdot \omega_1) \Rightarrow \boxed{\theta_{13} = \dfrac{a_3 \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}}$

(i.2) $a_3 \cdot \omega_2 = (\omega_1 \theta_{13} + \omega_2 \theta_{23} + \omega_3) \cdot \omega_2 =$

$= \theta_{23}(\omega_2 \cdot \omega_2)$

<u>SE</u> $\omega_2 \neq 0$ <u>ALLORA</u> $\boxed{\theta_{23} = \dfrac{a_3 \cdot \omega_2}{\omega_2 \cdot \omega_2}}$

<u>ALTRIMENTI</u> STOP

(ii) $\boxed{\omega_3 = a_3 - \omega_1 \theta_{13} - \omega_2 \theta_{23}}$

Oss: Passo 1 termina regolarmente $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_{n-1}$ lin indip.

Passo 2: se possibile, si normalizzano le colonne di Ω e se ne ricava una fatt QR.

(i) $\Delta = \mathrm{diag}\left(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|, \|\omega_3\|\right)$ $\neq 0$ $\neq 0$?

(ii) SE $\omega_3 \neq 0$ ALLORA:

$$\Omega \theta = \underbrace{\left(\Omega \Delta^{-1}\right)}_{U} \underbrace{\left(\Delta \theta\right)}_{T}$$

U, T è fatt QR!

ALTRIMENTI STOP.

Oss: Passo 1 e Passo 2 terminano regolarmente $\Leftrightarrow$ A non singolare. Se terminano regolarmente, U, T è fatt QR di A.

- uso della fatt QR per risolvere $Ax = b$

$[U, T] = GS(A)$ → funzione che realizza i due passi descritti se GS ha fallito allora STOP; $\boxed{\Rightarrow \det A = 0}$

$c = U^T b$;

$x = SI(T, c)$;

PROCEDIMENTO SODDISFACENTE !

Metodo di HOUSEHOLDER

Si riduce A a forma triangolare superiore con una success. di trasf. della forma

$$\begin{cases} A^{(k)} = X_{k-1} A^{(k-1)} \\ A^{(1)} = A \end{cases}, \quad k = 2, \dots, n$$

con X_{k-1} matrice ORTOGONALE.

Es:

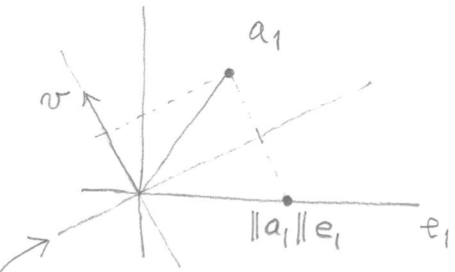
$$\underset{\substack{A^{(1)} \\ \| \\ A}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}} \xrightarrow{X_1} \underset{A^{(2)} = X_1 A^{(1)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix}} \xrightarrow{X_2} \underset{A^{(3)} = X_2 A^{(2)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}} = T$$

$$T = X_2 X_1 A \Rightarrow A = X_2^T X_1^T \, T$$

ORTOGONALE $= U$

Costruzione delle matrici X_k ("riflessioni")

X_1



"piano" $\perp$ $v = a_1 - \|a_1\| e_1$

X_1 è la matrice della rifless. che manda la colonna a_1 in $\|a_1\| e_1$

$$\begin{bmatrix} \|a_1\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $a_1 = \alpha v + \underbrace{\gamma}_{\perp v}$ (decompos ortog di $a_1 \ldots$)

$$\Rightarrow \quad a_1 \cdot v = \alpha \|v\|^2, \text{ ovvero } \quad \alpha = \frac{a_1 \cdot v}{\|v\|^2} = \frac{v^T a_1}{\|v\|^2}$$

- $X_1 a_1 = a_1 - 2\alpha v = a_1 - 2 \dfrac{v^T a_1}{\|v\|^2} v$

$$= a_1 - 2 \frac{v v^T}{\|v\|^2} a_1 = \underbrace{\left[I - 2 \frac{v v^T}{\|v\|^2} \right]}_{X_1} a_1$$

- $X_1^T X_1 = \left[I - 2 \dfrac{v v^T}{\|v\|^2} \right]^T \left[I - 2 \dfrac{v v^T}{\|v\|^2} \right]$

$$= \underbrace{\left[I - 2 \frac{v v^T}{\|v\|^2} \right]}_{\text{(è SIMMETRICA!)}} \left[I - 2 \frac{v v^T}{\|v\|^2} \right]$$

$$= I - 4 \frac{v v^T}{\|v\|^2} + 4 \frac{v v^T}{\|v\|^2} \frac{v v^T}{\|v\|^2}$$

$$\frac{v v^T}{\|v\|^2} \frac{v v^T}{\|v\|^2} = \frac{v(v^T v) v^T}{\|v\|^4} = \frac{v v^T}{\|v\|^2}$$

$$= I \quad (X_1 \text{ ortogonale!})$$

X_2

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]}_{X_2} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} \times & \times & \cdots & \times \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_{22}^{(2)} & \\ 0 & & & \end{array}\right]}_{A^{(2)}} = \left[\begin{array}{c|ccc} \times & \times & \cdots & \times \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F_2 A_{22}^{(2)} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Operando come per costruire X_1:

- F_2 è la matr della riflex che manda la 1ª colonna di $A_{22}^{(2)}$ (sia w_1) in $(\|w_1\|, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$.

- $v = w_1 - (\|w_1\|, 0, \dots, 0)^T$; $\quad w_1 = \alpha v + \overset{\perp v}{\gamma}$

- $$F_2 w_1 = w_1 - 2\alpha v$$
$$= \underbrace{\left[I - 2\,\frac{v v^T}{\|v\|^2} \right]}_{F_2 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}} w_1$$

ecc.