REALIZZAZIONE

colonne da 1 a $n-1$ ← ... quelle da modificare ...

```
for k = 1:n-1,
    if A(k,k) = 0 then STOP
    else for j = k+1:n,
        A(j,k) = A(j,k) / A(k,k)
        A(j,k+1:n) = A(j,k+1:n) - A(j,k) A(k,k+1:n)
    end;
    end;
end;
```

k-esimo pivot nullo

righe da $k+1$ a n

moltiplicatore

Es:

$A = A^{(1)}$ D

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

D, S, $A^{(2)}$ D, S, $A^{(3)}$

$k=1$ $\quad a_{11} = 1 \neq 0 \rightarrow \boxed{j=2} \quad a_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$A(2,2{:}3) = [4,0] - 1 \cdot [2,1] = [2,-1]$$

$\boxed{j=3} \quad a_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$A(3,2{:}3) = [6,0] - 1 \cdot [2,1] = [4,-1]$$

$k=2$ $\quad a_{22} = 2 \neq 0 \rightarrow \boxed{j=3} \quad a_{32} = \dfrac{a_{32}}{a_{22}} = \dfrac{4}{2} = 2$

$$A(3,3) = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$$

<u>Pb</u>: la procedura EG può arrestarsi prematuramente se $A(k,k) = a_{kk}^{(k)} = 0$ per un $k \in \{1,\dots,n-1\}$

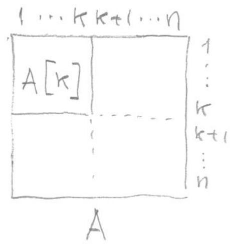
<u>Es</u>: $A = \boxed{\begin{matrix}1&2&1\\1&2&0\\1&6&0\end{matrix}} \Rightarrow a_{22}^{(2)} = 0 \Rightarrow$ EG si arresta per $k=2$.

<u>TEO</u> (terminazione regolare di EG)

La procedura EG determina una fattorizz LR della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k)} \neq 0$ per $k = 1,\dots,n-1$

$\Leftrightarrow \quad \det A[k] \neq 0$ per $k = 1,\dots,\underline{\underline{n-1}}$



<u>dim</u> (cenno): $A^{(2)}[2] = H_1[2]\,A[2] \Rightarrow \det A[2] = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)}$;

in generale $\det A[k] = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)}$ etc.

- <u>Uso di EG, SA, SI per risolvere $Ax = b$</u>

$[S, D] = EG(A)$;

<u>se</u> EG ha fallito <u>allora</u> STOP

$\not\Rightarrow \det A = 0$: ??

$c = SA(S, b)$;

<u>se</u> $\det D = 0$ <u>allora</u> STOP

$\Rightarrow \det A = 0$: ok!

$x = SI(D, c)$;

PROCEDIMENTO <u>NON SODDISFACENTE</u>!

Classi di matrici per le quali EG termina regolarm.

(SDP) Simmetriche Definite Positive

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SDP significa:

1) $A^T = A$ (simmetrica)

2) $\forall x \begin{matrix} \in \mathbb{R}^n \\ \neq 0 \end{matrix}$, $F(x) = x^T A x > 0$

$: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Oss: } A \text{ è SDP} \iff \det A[k] > 0 \text{ per } k = 1, \dots, n}$$

(PDF) a Predominanza Diagonale Forte

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a PDF significa:

$\underbrace{\forall k = 1, \dots, n}_{\text{per ogni RIGA...}}$: $|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ (PDF per righe...)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Oss: } A \text{ è PDF} \Rightarrow \det A \neq 0 \\ \quad \text{e } A[k] \text{ è PDF}, \; k = 1, \dots, n \end{array}}$$

* Procedura EGP *

Es: $D = H_3 P_3 H_2 P_2 H_1 P_1 A \Rightarrow A = \underbrace{P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T H_3^{-1}}_{\text{NON è tr inf ...}} D$

... MA: $\underbrace{\overbrace{(P_3 P_2 P_1)}^{P} (P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T H_3^{-1})}_{S}$ lo e'!

$\Rightarrow \quad PA = SD \;; \quad [S, D, P] = EGP(A)$

$[S, D] = EG(PA)$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{H_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D \;; \qquad P = P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- calcolare SD e PA, calcolare $H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} H_3^{-1}$ e la stessa per P a sinistra.

TEO (terminazione regolare EGP)

la procedura EGP determina una matrice di permutazione P ed una fatt LR di $PA \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Leftrightarrow$ le prime $n-1$ colonne di A sono linearmente indipendenti.

- uso di EGP, SA, SI per risolvere $Ax=b$

$[S, D, P] = EGP(A);$

<u>se</u> EGP ha fallito <u>allora</u> STOP;

$c = SA(S, Pb);$

<u>se</u> $\det D = 0$ <u>allora</u> STOP;

$x = SI(D, c)$

$\boxed{\Rightarrow \det A = 0}$

PROCEDIMENTO SODDISFACENTE !

$(Ax=b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow SDx = Pb \ldots)$