CN # 24,25 / 1 aprile 2015 / B23

* SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI *

Pb: dati $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oppure $\mathbb{C}^{n \times n}$),
$b \in \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$)
determinare $x \in \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$) t.c. $Ax = b$

$\forall b\ \exists !$ soluz $\Leftrightarrow$ A invertibile

Metodi di soluzione:

- diretti (con un numero finito di op aritmetiche su a_{ij} e b_i ottengo la sol esatta)
- iterativi (costruisco una succes di vettori che $\longrightarrow$ soluzione)

Oss: realizzando un m. diretto con un calcolatore (ovvero operando in $F(\beta, m)$) si ottiene una

SOLUZIONE APPROSSIMATA.

Es: $n=1$, $A=3$, $b=1$: $3x=1$

$x = \frac{1}{3}$ (sol esatta con una operazione)

$\xi = 1 \oslash 3 = 0{,}33\ldots$ (sol approssimata con una pseudo-op)

Per ciascun metodo occorre studiare

- la PRECISIONE della approssimazione ottenuta
- il COSTO del calcolo dell'approssimazione

METODI DIRETTI

- Casi semplici (in base alla struttura di A)

(D) A diagonale $(i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$

(1). A invertibile $\Leftrightarrow \forall k,\ a_{kk} \neq 0$

(2) Soluzione: $x_k = b_k / a_{kk} \quad k=1,\ldots,n$

(T) A triangolare $\begin{cases} i>j \Rightarrow a_{ij}=0 & \text{tr SUPERIORE} \\ i<j \Rightarrow a_{ij}=0 & \text{tr INFERIORE} \end{cases}$

(1) A invertibile $\Leftrightarrow \forall k,\ a_{kk} \neq 0$

(2) Soluzione: $x = SI(A,b)$ tr sup

$x = SA(A,b)$ tr inf

SOSTITUZIONE all' INDIETRO

cioè:

---

function $x = SI(T, c)$

<u>dati</u>: T matrice $n \times n$ tr superiore, invertibile;
c colonna con n componenti;

<u>uscita</u>: x colonna con n comp t.c. $Tx = c$

$x_n = c_n / t_{nn}$;

<u>per</u> $k = n-1, \dots, 1$ <u>ripeti</u>

$s_k = c_k - (t_{k,k+1} x_{k+1} + \dots + t_{k,n} x_n)$;

$x_k = s_k / t_{kk}$;

endfunction

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $SI(A, b)$ ...

<u>Es</u>: descrivere la procedura $x = SA(T, c)$ di SOSTITUZIONE in AVANTI, che determina la soluzione di un sistema con matrice <u>tr inf</u>.

---

(0) A ortogonale (• colonne di A base on di $\mathbb{R}^n$ risp ps canonico;
• $A^T A = I$
• $A^{-1} = A^T$)

(1) certamente invertibile

(2) soluzione: $x = A^T b$

(P) A matrice <u>di permutazione</u> (colonne [righe] di A sono una permutazione di quelle della matr identica

<u>Es</u>: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ...)

<u>Oss</u>: A di permutaz

- $\Rightarrow$ A ortogonale
- $v \in \mathbb{R}^n$, le comp di Av si ottengono <u>permutando</u> quelle di v

(1) certamente invertibili <

(2) Soluzione: $x = A^T b$ (ottenuta permutando...)

- Caso generale

idea: fattorizzare A con (scrivere A come prodotto di) fattori semplici...

Es: (1) fattorizzazione LR (o LU):

$S, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- S tr inf con $s_{kk} = 1$ ($\Rightarrow$ invertibile)
- D tr sup
- $SD = A$ $\boxed{A \text{ invert} \Leftrightarrow D \text{ invert}}$

(2) fattorizzazione QR:

$U, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- U ortogonale ($\Rightarrow$ invertibile)
- T tr sup
- $UT = A$ $\boxed{A \text{ invert} \Leftrightarrow T \text{ invert}}$

... poi (uso della fattorizz $A = MN$):

$$Ax = b \sim MNx = b$$

- cambio variabili : $c = Nx$
- $Mc = b$ caso semplice : determino c
- $Nx = c$ caso semplice : determino x

<u>Es</u> : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

- verificare che la fattorizz è corretta (è LR)
- risolvere il sistema usando SA, SI.

<u>Pb</u> : come determinare una fattorizzazione ?

- LR : eliminazione di Gauss ;
- QR : procedura di ortonormalizzazione.

* PROCEDURA EG *

Es:

- $$\underset{A}{\overset{A^{(1)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_1} \underset{H_1 A^{(1)}}{\overset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_2} \underset{H_2 A^{(2)}}{\overset{A^{(3)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}}} = D$$

- $D = H_2 H_1 A$ con H_1, H_2 tr inf con 1 sulla diag

$$\Rightarrow A = \boxed{(H_1^{-1} H_2^{-1})} D$$

$= S$ (tr inf con $s_{kk} = 1$)

- $$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 \\ -\lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

da H_2^{-1}

$\Rightarrow$ noti λ_{ij} costruire S è <u>banale</u>!

- calcolo λ_{ij}: ad es λ_{21} è l'<u>unico</u> t.c

$$[\text{riga 2 di } A^{(1)}] - \lambda_{21} [\text{riga 1 di } A^{(1)}]$$

$$= [\,0 \ \bullet \ \bullet\,] \quad (\text{riga 2 di } A^{(2)})$$

il primo elem dell'uguaglianza è

$$a_{21}^{(1)} - \lambda_{21} a_{11}^{(1)} = 0$$

$\Rightarrow$ <u>SE</u> $a_{11}^{(1)} \neq 0$ <u>ALLORA</u> $\lambda_{21} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

PIVOT

MOLTIPLICATORE