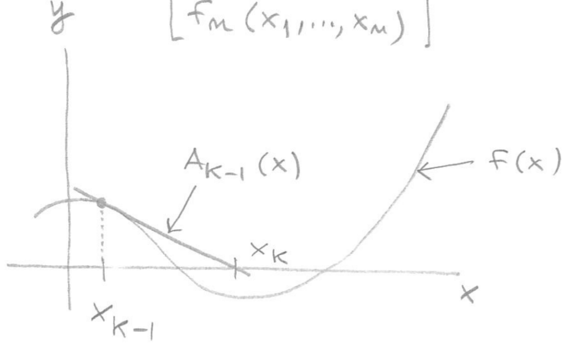
* METODO di NEWTON per $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *

(1) Idea: ad ogni passo si affronta il problema "linearizzato"...

$$f(x) = \underbrace{f(x_{k-1}) + J_f(x_{k-1})(x - x_{k-1})}_{A_{k-1}(x)} + \ldots$$

$$f(x) \to \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

$n = 1$



$J_f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ MATRICE JACOBIANA di f in x...

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

SE $J_f(x_{k-1})$ non singolare

ALLORA: (I) si risolve il SISTEMA LINEARE $\boxed{J_f(x_{k-1})\, v = -f(x_{k-1})}$

(II) si pone $\boxed{x_k = x_{k-1} + v}$

Es: $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ -x_1 + x_2^2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- $J_f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ -1 & 2x_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$

- $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; sistema da risolvere: $J_f(x_0)\, v = -f(x_0)$

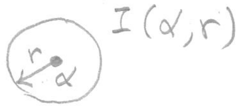
ovvero: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v = - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$v = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_0 + v = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$$

(2) É il metodo ad un punto def da

$$h(x) = x - J_f(x)^{-1} f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

- TEO (convergenza LOCALE): Siano $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ suff regolare e $\alpha \in \mathbb{R}^n$ pu di h.



SE $\rho(J_h(\alpha)) < 1$

ALLORA: $\exists\, r > 0$ t.c. $\forall x_0 \in I(\alpha, r)$

si ha $\boxed{\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha}$

def (SPETTRO, RAGGIO SPETTRALE)

Sia $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$

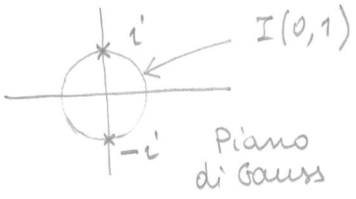
(I) $\sigma(M) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ autovalore di } M \}$

(II) $\rho(M) = \max\{ |\lambda|, \lambda \in \sigma(M) \}$

Es: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\sigma(M) = \{2, -1\}$, $\rho(M) = 2$

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma(M) = \{i, -i\}$, $\rho(M) = 1 \longrightarrow$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma(M) = \{0\}$, $\rho(M) = 0$



- $h(x) = x - J_f^{-1}(x)\, f(x)$

$$\Rightarrow \quad J_h(x) = \Big(\partial_1 h(x), \dots, \partial_n h(x) \Big)$$

$$= \Big(e_1 - \partial_1 J_f^{-1}(x)\, f(x) - J_f^{-1}(x)\, \partial_1 f(x),$$

$$e_2 - \partial_2 J_f^{-1}(x)\, f(x) - J_f^{-1}(x)\, \partial_2 f(x),$$

$$\dots$$

$$e_n - \partial_n J_f^{-1}(x)\, f(x) - J_f^{-1}(x)\, \partial_n f(x) \Big)$$

$$= \big(e_1, \dots, e_n \big) -$$

$$- \Big(\partial_1 J_f^{-1}(x)\, f(x), \dots, \partial_n J_f^{-1}(x)\, f(x) \Big) -$$

$$- \quad J_f^{-1}(x) \Big(\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x) \Big)$$

$$= \cancel{I} - \Big(\dots, \partial_k J_f^{-1}(x)\, f(x), \dots \Big) - \cancel{J_f^{-1}(x)\, J_f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad J_h(\alpha) = \Big(\dots, \partial_k J_f^{-1}(\alpha)\, f(\alpha), \dots \Big) = 0$$

(perchè α, p.u. di h, è <u>zero</u> di f !)

- Teo conv locale $\Rightarrow$ $\forall \alpha$ t.c. $f(\alpha) = 0$ e $J_f(\alpha)$ <u>non singolare</u>, $\exists\, r(\alpha) > 0$ t.c.

$$\forall x_0 \in I(\alpha, r(\alpha)), \quad \lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$$

(3) se f suff regolare, $f(\alpha) = 0$ e $J_f(\alpha)$ non singolare, allora $\boxed{\text{ordine di conv (ad } \alpha) \geq 2.}$

Es : `LMV_newtonNd_test_00.sce`

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 + g \\ -x_1 + x_2^2 + g \end{bmatrix} \qquad (g \in \mathbb{R} \text{ assegnato})$$

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ -1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

- $g = 0$:

Ⓐ $f(x) = 0$ per $x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $x'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Ⓑ $J_f(x') = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ non singolare

```
//
// Test per newtonNd: intersezione di due parabole (zeri della funzione
// f_test).
//
// Parte 1: assegnare g = 0. Soluzioni esatte: (0,0) e (1,1).
// (a) Assegnare x0 = [1;-1]. Osservare il grafico della stima
//     dell'errore e costruire quello per la stima dell'ordine di convergenza.
//     Calcolare la matrice jacobiana di f_test in (0,0) e verificarne la non
//     singolarità.
// (b) Assegnare x0 = [1;0] (si osservi che il grafico finale generato
//     da newtonNd non è significativo). Verificare che il metodo
//     supera il numero di iterazioni massimo perché la successione
//     calcolata (che si trova in XX) è periodica (e quindi è inutile
//     aumentare il numero massimo di iterazioni).
// (c) Cercare x0 in modo che la successione abbia limite (1,1),
//     osservare il grafico della stima dell'errore e costruire quello per la
//     stima dell'ordine di convergenza, calcolare la matrice jacobiana di
//     f_test in (1,1) e verificarne la non singolarità.
//
// Parte 2: assegnare g = 1/4. Soluzione esatta: (1/2,1/2).
//     Assegnare x0 = [1;-1]. Osservare il grafico della stima
//     dell'errore e costruire quello per la stima dell'ordine di convergenza,
//     calcolare la matrice jacobiana di f_test in (1/2,1/2) e verificarne la
//     singolarità. Calcolare il determinante della matrice jacobiana di f_test
//     nel punto z.
//
if ~exists('newtonNd') then
   Percorso = "PERCORSO newtonNd.sci"; // <----------- *** MODIFICARE ***
   exec(Percorso + "newtonNd.sci");
end;
//
g = 0;
//g = 1/4;
//
function y=f_test(x)
    y = [x(1)^2 - x(2) + g;
        -x(1) + x(2)^2 + g]
endfunction
//
function j=df_test(x)
    j = [2*x(1),      -1;
              -1, 2*x(2)]
endfunction
//
// *** Ricerca zeri
//
x0 = [1; -1];
E_newt = 1d-8;
kmax = 30;
//
[z,v,info,StimaErr,XX] = newtonNd(f_test,x0,df_test,E_newt,kmax,"loquace");
//
// *** Fine ricerca zeri
//
printf("z ="); disp(z);
printf("v ="); disp(v);
printf("info ="); disp(info);
//
// Grafici
//
scf(0);clf();
// Disegna i grafici delle due curve da intersecare, la successione
// generata dal metodo di Newton (cerchietti verdi) e il punto z
// (crocetta rossa).
tt = linspace(-2,2,100);
plot(tt,tt.^2+g);plot(tt.^2+g,tt);
plot(XX(1,:),XX(2,:),"go--",z(1),z(2),"r+");
xlabel("x(1)");
ylabel("x(2)");
xgrid();
//
```

$J_f(x'') = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ non singolare

Ⓒ mi aspetto ordine di conv ≥ 2 ...

- $\gamma = \frac{1}{4}$:

  Ⓐ $f(x) = 0$ per $x' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

  Ⓑ $J_f(x') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ singolare

  Ⓒ mi aspetto ordine di conv < 2 ...