

* METODO di NEWTON *

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con derivata $f' \neq 0$ su $[a, b]$,
 e' il m. it ad un punto def da

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

• PROPRIETA':

(I) $f(x) = 0$ equivalente a $x = h(x)$

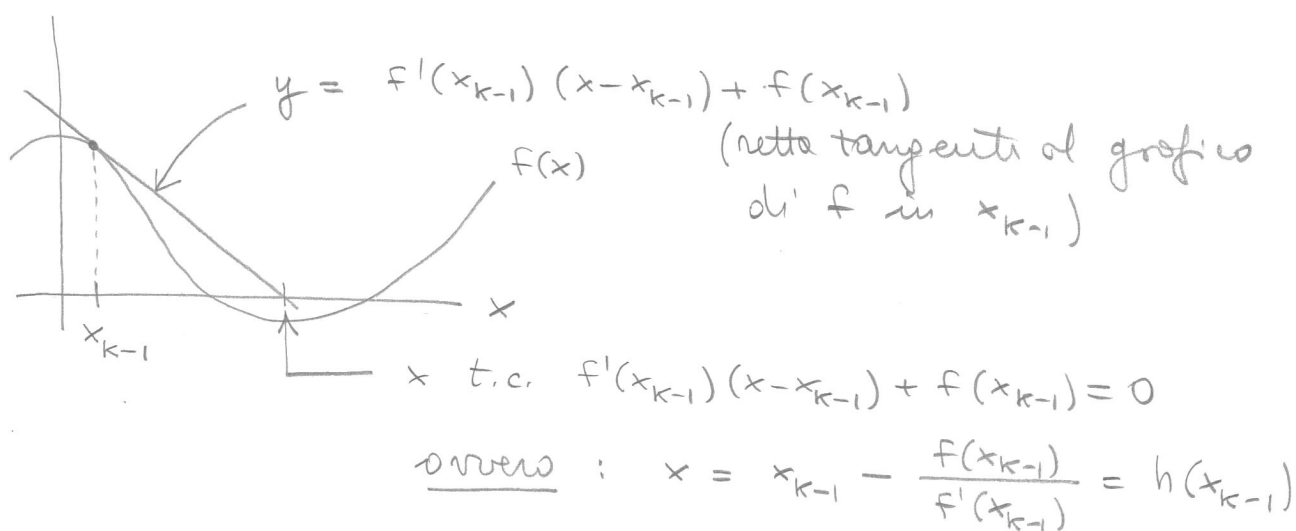
(II) se $f \in C^2[a, b]$ e α zero di f allora:

$$h'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

\Rightarrow $h'(\alpha) = 0$ (si ricordi che, per i.h.,
 $f'(x) \neq 0$)

Teo conv LOCALE \Rightarrow mdi' Newt certam
utili'22 per affarom α .

(III) Int geometrica (METODO delle TANGENTI):



(IV) Scelta di x_0 per m di Newt:

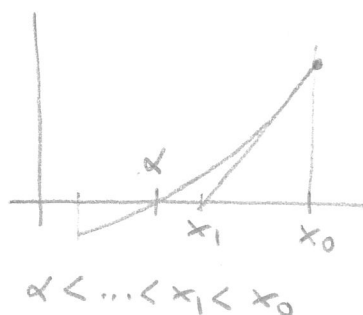
SE $[a, b]$, $f \in C^2[a, b]$, x_0 t.c.

- 1) $\exists \alpha \in [a, b]$ zero di f
- 2) $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0$ [\Rightarrow α unico zero]
- 3) $f(x_0) f''(x_0) > 0$

ALLORA: la success gen dal m di Newt a partire da $x_0 \dots$

- 1) e' CONVERGENTE ad α
- 2) e' MONOTONA

dim: graficamente...



(V) sia $x_k \rightarrow \alpha$ gen da m.it def da h
 con $x_k \neq \alpha$ per ogni k ; allora:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \alpha &= h(x_k) - h(\alpha) = \\ &= h'(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{1}{2} h''(\theta)(x_k - \alpha)^2 \end{aligned}$$

con θ tra x_k ed α

SE $h'(\alpha) \neq 0$ ALLORA: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = |h'(\alpha)|$
 $|h'(\alpha)| < 1$ ORDINE di CONV = ①

SE $h'(\alpha) = 0$ ALLORA: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \frac{1}{2} |h''(\alpha)|$
ORDINE di CONV = ② [e h suff regolare...]

Confronto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{per ogni } \theta > 0: \frac{|x_k - \alpha|}{\theta^k} \rightarrow 0$$

Es: $f(x) = x + \ln x$

• $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ zero di f



• $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

• $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

• $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ success $x_k \rightarrow \alpha$, crescenti.

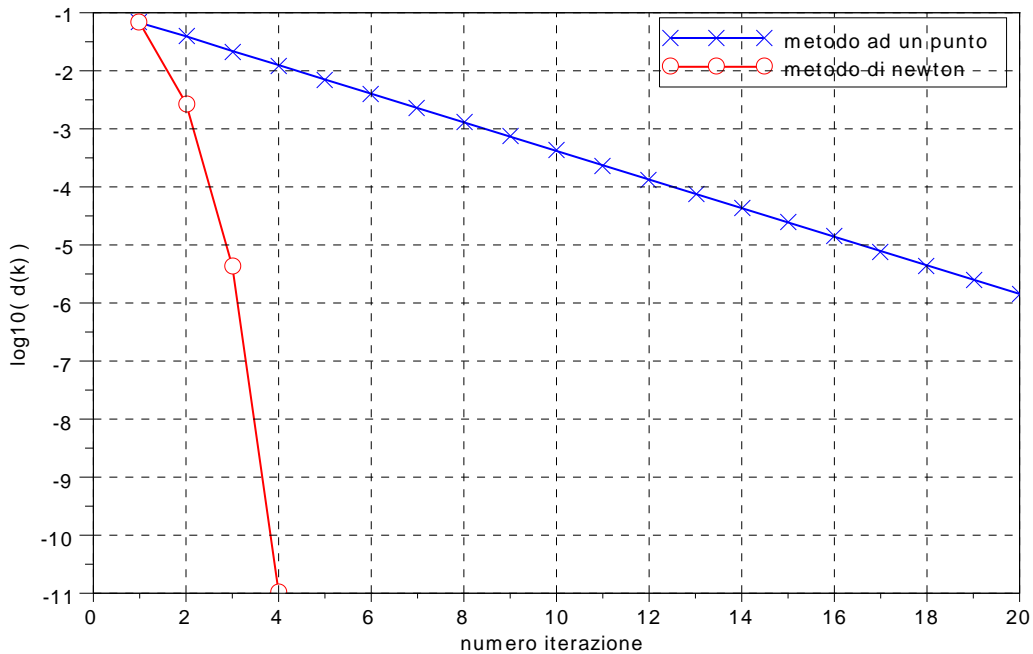
Confronto tra

1) success gen del m. it def da $h_2(x) = e^{-x}$
a partire da $x_0 = \frac{1}{2}$

2) success gen del m di Newt a partire da
 $x_0 = \frac{1}{2}$

Per entrambe l'err (assoluto) iniziale

$$e^{\sim} |x_0 - \alpha| = \left| \frac{1}{2} - \alpha \right| \approx 7 \cdot 10^{-2}$$



OSS : $x_k \rightarrow \alpha$ con :

• $|x_k - \alpha| = |h'(\theta)| |x_{k-1} - \alpha|$, θ tra x_{k-1} e α

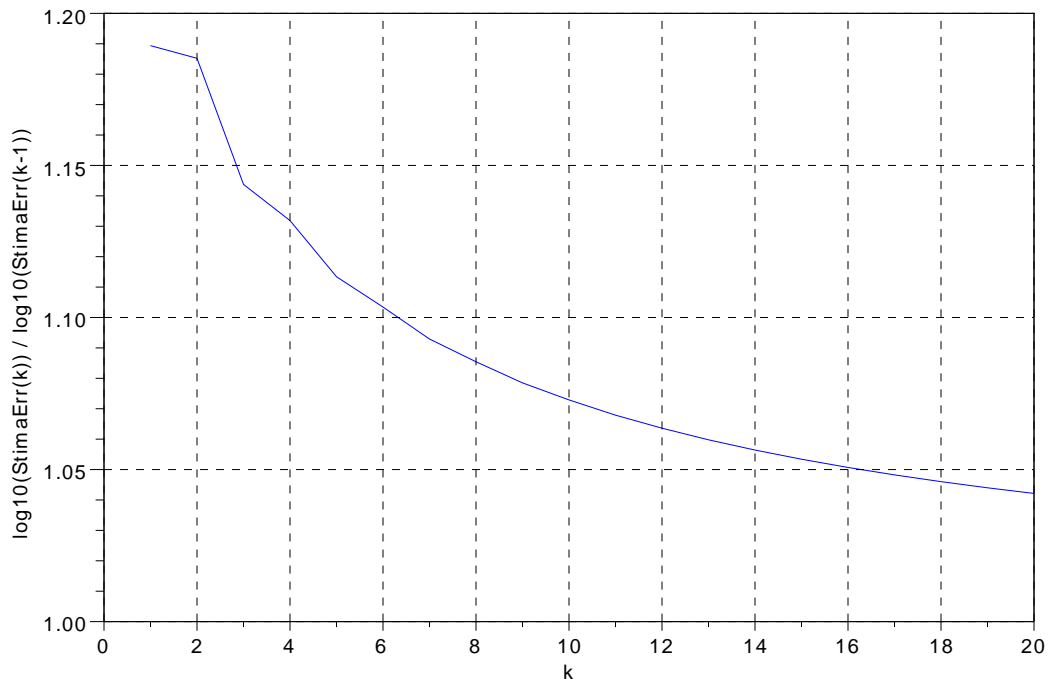
$\Rightarrow \frac{\log |x_k - \alpha|}{\log |x_{k-1} - \alpha|} \rightarrow 1$

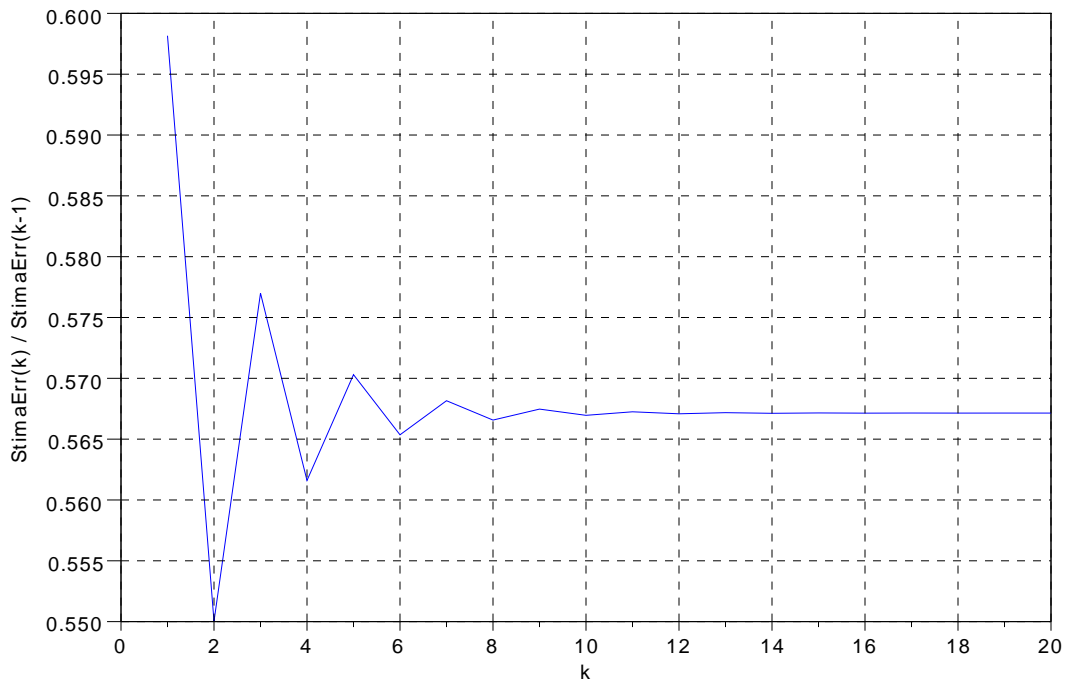
① $\frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|} \rightarrow |h'(\alpha)| \quad (< 1)$

• $|x_k - \alpha| = \frac{1}{2} |h''(\theta)| |x_{k-1} - \alpha|^2$, θ tra x_{k-1} e α

$\Rightarrow \frac{\log |x_k - \alpha|}{\log |x_{k-1} - \alpha|} \rightarrow 2$

② $\frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|^2} \rightarrow \frac{1}{2} |h''(\alpha)| \quad (\neq 0 \dots)$





Oss: se $h''(\alpha) = 0$, la conv della success
sarà PIÙ RAPIDA ...