Es : $f(x) = x + \ln x \; : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

① # zeri di f e SEPARAZIONE

- $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ (f crescente $\Rightarrow$ # zeri ≤ 1)
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow \exists\, \alpha \in (0,1)$ zero

$\boxed{\exists \text{ un solo zero, } \alpha \in (0,1)}$

② $h_1(x) = -\ln x$
$h_2(x) = e^{-x}$
$h_3(x) = \frac{e^{-x} + x}{2}$

Candidati per def m. it per approx α.

È vero che α zero di f $\Leftrightarrow$ α pu di h_k ?

$\boxed{h_1}$ $f(\alpha) = 0 \sim \alpha + \ln \alpha = 0 \sim \alpha = -\ln \alpha$
$\sim \alpha = h_1(\alpha)$ ok

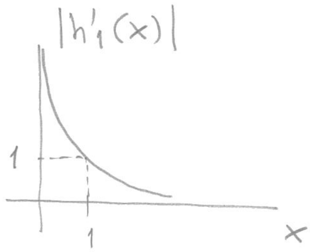
$\boxed{h_2}$ $f(\alpha) = 0 \sim \alpha = -\ln \alpha \sim -\alpha = \ln \alpha$
$\sim e^{-\alpha} = \alpha \sim \alpha = h_2(\alpha)$ ok

$\boxed{h_3}$ Es: verificare che ok !

③ h_1 utilizzabile ?

Cerco di applicare Teo conv locale :

$$h_1'(x) = -\frac{1}{x}$$



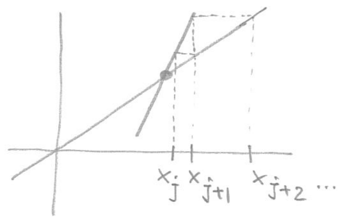
Siccome $\alpha \in (0,1)$,

CERTAMENTE $|h_1'(\alpha)| > 1$ ... il TEO non aiuta.

MA :

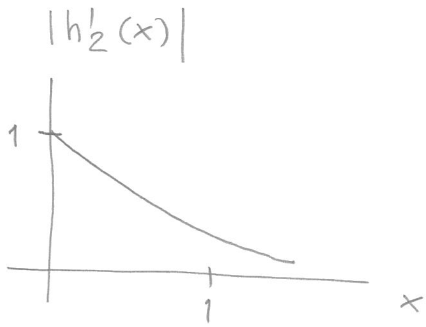
Se x_k succes gen dal m. it def da h,
α pu di h e $|h'(\alpha)| > 1$
allora
$\exists\, n$ t.c. $\forall k \geq n$ si ha $x_k = \alpha$
oppure $x_k \not\to \alpha$

dim :



Dunque : h_1 NON UTILIZZABILE per approx α

④ h_2 utilizzabile ?



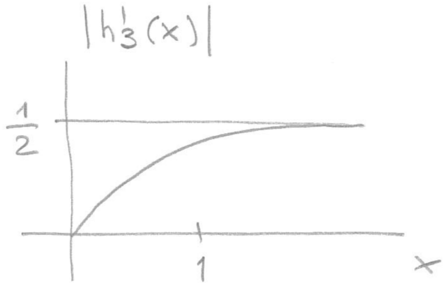
$$h_2'(x) = -e^{-x}$$

Siccome $\alpha \in (0,1)$,

CERTAMENTE $|h_2'(\alpha)| < 1$

$\Rightarrow \exists$ int che verifica (1) e (2) del Teo conv!

(5) h_3 utilizzabile ?



$$h_3'(x) = \frac{1-e^{-x}}{2}$$

Siccome $\alpha \in (0,1)$,

CERTAMENTE $|h_3'(x)| < 1 \Rightarrow \exists$ int...

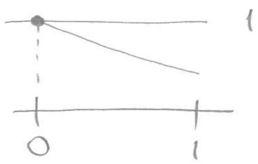
Dunque: h_3 UTILIZZABILE per appross α.

(6) Come determino x_0 (ad es per m. it def da h_2):

- cerco int che verifica ip (1) e (2) del Teo conv...

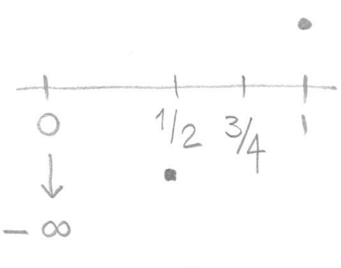
... $(0,1)$ non va bene perché non chiuso

... si ha:



, quindi va certam bene un int del tipo $[a,1]$

con $[a,1] \ni \alpha$. Lo cerco con bisezione:



$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2} - \ln 2 < 0$$

$\Rightarrow \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]$ ok!

Per det x_0 ("l'estremo più vicino ad α") devo decidere il segno di $f\left(\tfrac{3}{4}\right)$...

(7) Quanto rapidam converge la succes ?

- studio quanto rapidam $x_k - \alpha \to 0$;
- $x_k - \alpha = h(x_{k-1}) - h(\alpha) \overset{\text{se } h \in C^1[a,b]}{=} h'(\theta_k)(x_{k-1} - \alpha)$

  θ_k tra x_{k-1} e α

  ovvero, posto $d_k = |x_k - \alpha|$:

$$d_k = |h'(\theta_k)|\, d_{k-1}$$

- Siccome $\boxed{h'(x) \neq 0 \text{ su } [a,b]}$ e $d_0 > 0$, allora: $\forall k$, $d_k > 0$
- $$\lim_{k\to\infty} \frac{d_k}{d_{k-1}} = \lim_{k\to\infty} |h'(\theta_k)| = |h'(\alpha)|$$
- d_k si comporta, "asintoticamente", come la succes $|h'(\alpha)|^k d_0$.

- Nel caso del m. it def da h_2: $|h_2'(\alpha)| \simeq 0{,}57$
- Nel caso del m. it def da h_3: $|h_3'(\alpha)| \simeq 0{,}25$