CN # 11,12 / 16 marzo 2015 / C22

* METODO di NEWTON *

dati : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con derivata $\begin{cases}\text{continua}\\ \neq 0\end{cases}$, $\gamma\in\mathbb{R}$;

- $x_0 = \gamma$
- per $k=1,2,3\ldots$ ripeti :

  se $x_{k-1}\notin[a,b]$ allora STOP

  altrimenti $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

uscita : quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k .

Caso particolare di METODO ad UN PUNTO:

la f. che "definisce il metodo"

<u>dati</u>: $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\gamma \in \mathbb{R}$

- $x_0 = \gamma$
- <u>per</u> $k = 1, 2, \dots$ <u>ripeti</u>:

  <u>se</u> $x_{k-1} \notin [a,b]$ <u>allora</u> STOP

  <u>altrimenti</u> $x_k = h(x_{k-1})$

<u>uscita</u>: quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k.

- <u>Come funziona</u>: Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$\boxed{\text{e}}$ la succes. x_0, $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1)$, ...

è <u>CONVERGENTE</u> ad $\alpha \in \mathbb{R}$, <u>allora</u>: $\alpha = h(\alpha)$

ovvero <u>α è PUNTO UNITO di h</u>.

<u>dim</u>:

$$\begin{array}{c} x_0, \; x_1, \; x_2, \dots \to \alpha \\ \quad\;\; \| \quad\;\; \| \\ h(x_0), \; h(x_1), \; h(x_2), \dots \to \alpha \end{array}$$

$$\text{Ma: } \underset{\alpha}{\underset{\|}{\lim_{k\to\infty} h(x_k)}} \underset{\text{h CONTINUA}}{=} h\Big(\underset{\boxed{\alpha}}{\underset{\|}{\lim_{k\to\infty} x_k}}\Big)$$

q.di: $\quad \alpha = h(\alpha)$.

Dunque: il metodo ad un punto def da h si può cercare di utilizz per APPROSSIMARE i PUNTI UNITI di h.

Oss: Nel m di Newton si ha

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e $\boxed{\alpha \in [a,b] \text{ pu di } h \iff \alpha \in [a,b] \text{ zero di } f}$

dim: • α pu di h $\sim$ $\alpha = h(\alpha)$

ovvero $\cancel{\alpha} = \cancel{\alpha} - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = 0$

• α zero di f $\sim$ $f(\alpha) = 0$

dunque $h(\alpha) = \alpha - \dfrac{f(\cancel{\alpha})}{\cancel{f'}(\alpha)} = \alpha$.

Pb: (1) $\exists\, \gamma$ t.c. $x_0 = \gamma,\ x_1 = h(x_0), \dots$ è conv?

(2) Se $\exists$, come si determina?

TEO (di convergenza)

Siano $[a,b]$, $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\gamma\in[a,b]$ t.c.

(1) $\exists\,\alpha$ pu di h in $[a,b]$;

(2) $\exists\, L\in[0,1)$ t.c. $\forall\, x,y\in[a,b]$ si ha $|h(x)-h(y)|\leq L\,|x-y|$

(3) la success $x_0=\gamma$, $x_1=h(x_0)$, $x_2=h(x_1)$, ... e' in $[a,b]$

Allora: 1 α è l' unico pu di h in $[a,b]$;

2 la success $x_0=\gamma$, $x_1=h(x_0)$, $x_2=h(x_1)$, ... è convergente (ad α)

---

dim: 1 Per assurdo. ip: $\exists\,\beta\neq\alpha$ pu di h in $[a,b]$;

allora: $|\beta-\alpha|=|h(\beta)-h(\alpha)|\leq L\,|\beta-\alpha|<|\beta-\alpha|$, assurdo.

(2) $|x_k - \alpha| = |h(x_{k-1}) - h(\alpha)| \leq L\,|x_{k-1} - \alpha|$

ma: $|x_{k-1} - \alpha| = |h(x_{k-2}) - h(\alpha)| \leq L\,|x_{k-2} - \alpha|$

quindi: $|x_k - \alpha| \leq L^2\,|x_{k-2} - \alpha|$

iterando il ragionamento: $|x_k - \alpha| \leq L^k\,|x_0 - \alpha|$

e siccome $L < 1$: $\boxed{\lim_{k \to \infty} |x_k - \alpha| = 0}$

Oss:

- sotto le ip del TEO di convergenza, la succes

$$\delta_k = |x_k - \alpha|$$

degli errori assoluti (che $\to 0$):

(A) è MONOTONA decrescente;

(B) $\delta_k \leq L^k \delta_0$: tende a 0 con velocità ALMENO pari a quella di L^k.

- SE $h \in \mathcal{C}^1[a,b]$ e $\forall x \in [a,b]$ si ha $|h'(x)| \leq L$

ALLORA:

$$\forall x, y \in [a,b],\ |h(x) - h(y)| \underset{\text{Teo di Lagrange}}{=} |h'(\underbrace{\theta}_{\text{tra } x \text{ ed } y})|\,|x-y| \overset{ip}{\leq} L\,|x-y|$$

quindi, una condiz che implica l'ip (2) del TEO di convergenza è:

(2') $h \in \mathcal{C}^1[a,b]$ ed $\exists\, L \in [0,1)$ t.c. $\forall x \in [a,b]$ si ha $|h'(x)| \le L$

- <u>SE</u> ip (1) e (2) del Teo di conv sussistono per $[a,b]$ e $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, <u>ALLORA</u>: posto

$\gamma =$ l'estremo di $[a,b]$ più vicino ad α

si ha: $|x_1-\alpha| \le L|\overset{=\gamma\in[a,b]}{x_0}-\alpha| < |x_0-\alpha| \Rightarrow x_1 \in [a,b]$,

$$|x_2-\alpha| \underset{\text{perché } x_1\in[a,b]}{\le} L|x_1-\alpha| \le L^2|x_0-\alpha| < |x_0-\alpha| \Rightarrow x_2 \in [a,b]$$

ecc, ovvero <u>la succes</u> $x_0=\gamma$, $x_1 = h(x_0), \dots$ <u>È IN $[a,b]$</u>!

<u>Oss</u>: <u>SE</u> α pto centrale di $[a,b]$, $\forall\gamma$ si ottiene succes convergenti

<u>Pb</u>: come decido quale dei due estremi di $[a,b]$ è più vicino ad α?

Considero $F(x) = x - h(x)$: è CRESCENTE in $[a,b]$ e $F(\alpha) = 0 \Rightarrow$

$F(a)<0$, $F(b)>0$ e valutando il segno di $F\left(\frac{a+b}{2}\right)\dots$

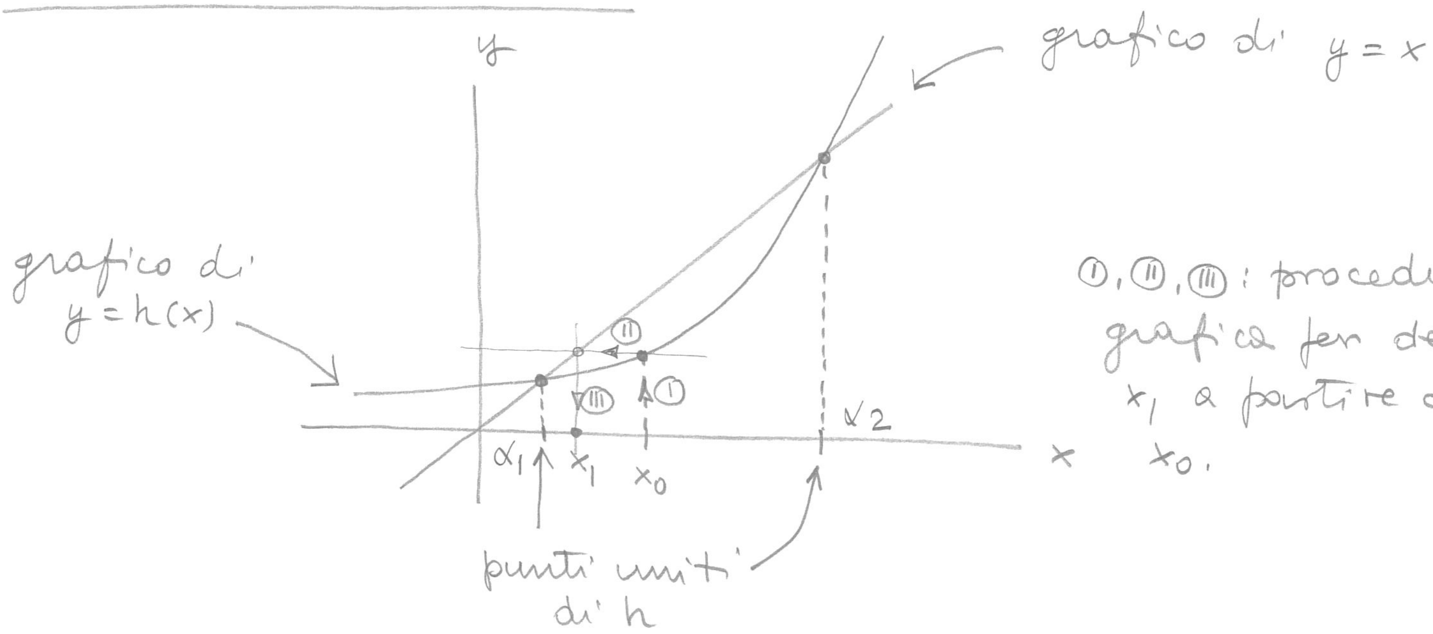
• **TEO** (di convergenza LOCALE):

siano $h \in C^1[a,b]$ e $\alpha \in [a,b]$ pu di h.

SE $|h'(\alpha)| < 1$ **ALLORA** $\exists\, \rho > 0$ t.c. ip Teo di convergenza verificate da $[\alpha-\rho, \alpha+\rho]$, h e $\forall \gamma \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$

> **Oss:** NON si chiedono propr di h' valide GLOBALMENTE su $[a,b]$, ma SOLO in α. DI CONSEGUENZA si "trova" un intervallo $[\alpha-\rho, \alpha+\rho]$ su cui $|h'(x)| \le L < 1$ per ogni x.

COSTRUZIONI GRAFICHE



I, II, III: procedura grafica per det x_1 a partire da x_0.

È graficamente evidente che $0 < h'(\alpha_1) < 1$ e $h'(\alpha_2) > 1$: il Teo di conv locale ci assicura che ...