

## ARITMETICA del calcolatore

- ① Con quali numeri è capace di operare il calcolatore?
- ② Cosa se fare con questi numeri?

### 1) NUMERI DI MACCHINA

•  $x \in \mathbb{R}$   
 $x \neq 0$ ,  $\beta$  intero  $\geq 2$  (BASE)

esiste un solo modo di scrivere  $x$  nella forma:

$$x = (-1)^s \beta^b g$$

con:  $s \in \{0, 1\}$  (SEGNO di  $x$ )

$b \in \mathbb{Z}$  (ESPONENTE di  $x$  in base  $\beta$ )

$g \in [\beta^{-1}, 1)$  (FRAZIONE di  $x$  in base  $\beta$ )

Es:  $x = \sqrt{5}$ ,  $\beta = 10 \Rightarrow s = 0, b = 1, g = \frac{\sqrt{5}}{10}$

$x = \sqrt{5}$ ,  $\beta = 2 \Rightarrow s = 0, b = 2, g = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Oss: la condiz  $g \in [\beta^{-1}, 1)$  si traduce così: la scrittura posizionale di  $g$  in base  $\beta$  ha la forma:  $0, c_1 c_2 c_3 \dots$  con  $c_1 \neq 0$ .

Es:  $x = \frac{1}{10}$ ,  $\beta = 10 \Rightarrow s = 0$ ,  $b = 0$ ,  $g = \frac{1}{10} = 0,1$

$x = \frac{1}{10}$ ,  $\beta = 2 \Rightarrow s = 0$ ,  $b = -3$ ,  $g = \frac{8}{10} = 0,1100$

la scrittura pos di  $g$  in base 2 (ha LUNGHEZZA infinita!)

• se  $\beta = 2$ ,  $c_1 = 1$  per ogni  $x \neq 0$

def (numeri in virgola mobile)

$\beta$  intero  $\geq 2$ ,  $m$  intero  $\geq 1$

$$F(\beta, m) = \{0\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^s \beta^b \underbrace{0, c_1 \dots c_m}_{m \text{ cifre in base } \beta} \right\}$$

$\{0, 1\} \xrightarrow{\psi} s$   
 $\in \mathbb{Z} \xrightarrow{b}$   
 $\neq 0$

insieme dei numeri in VIRGOLA MOBILE e PRECISIONE  $m$ , in base  $\beta$ .

Es:  $F(10, 1)$

•  $\frac{1}{100} \in F(10, 1)$ :  $\frac{1}{100} = 10^{-2} = 10^{-1} 0,1$

•  $\frac{11}{100} \notin F(10, 1)$ :  $\frac{11}{100} = 0,11 = 10^0 \cdot 0,11$  ← frazione non compatibile con precis = 1

• tutti gli elem positivi di  $F(10, 1)$  con exp zero:

$$\mathcal{B} = \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$$

• tutti quelli con exp  $b \in \mathbb{Z}$ :  $10^b \mathcal{B}$  (positivi),  $-10^b \mathcal{B}$  (negativi)

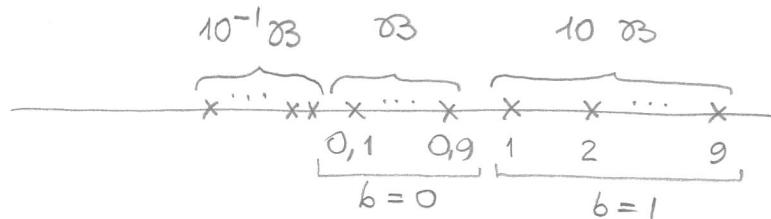
$$\bullet F(10,1) = \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^b 10^b \mathbb{Z} \cup \{0\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} 10^b \mathbb{Z}$$

PROPRIETÀ di  $F(\beta, m)$

- $\subset \mathbb{Q}$  ( $\Rightarrow$  numerabili e ordinato)
- simmetrico risp a zero
- zero è (l'unico) pto di accumulazione
- $\sup F(\beta, m) = +\infty$ ,  $\inf F(\beta, m) = -\infty$

Oss (distanza tra elem consecutivi)

Es:  $F(10,1)$   
(positivi)



- $b \in \mathbb{Z}$ ; dist tra elem consecutivi  $= 10^b \cdot 0,1$   
 $= 10^b \cdot 10^{-1}$

- in generale: dato  $\xi = \beta^b g$  e detto  $\sigma(\xi)$  il successore di  $\xi$  si ha:

$$\sigma(\xi) - \xi = \beta^{b-m}$$

- la distanza è tanto maggiore quanto l'esp  $b$  è grande ( $\Rightarrow$  "tanto più  $\xi$  è lontano da 0")
- detto  $\beta^b$  l'ordine di grandezza di  $\xi$  si ha:

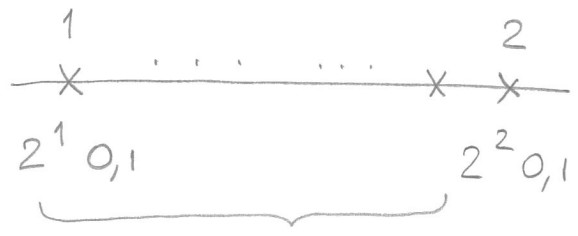
$$\frac{\sigma(\xi) - \xi}{\beta^b} = \beta^{-m}$$

ordine di grandezza

distanza tra elem consecuti vi

quantita' indep da  $\xi$ :  
 dip solo da base ( $\beta$ )  
 e precisione ( $m$ )

Es: Nell' Es finale della Lez precedenti, la situazione e'



$b=1 \Rightarrow \text{dist} = 2^{1-53} = 2^{-52}$

$\approx 2,22 \cdot 10^{-16}$

- $\alpha \in (1, 2)$
- $F(2, 53)$   
 (comune a SCIAB, OCTAVE, MATLAB)

la procedura di bisez ha trovato l'int (non degener) piu' piccolo possibile che contiene lo zero, MA questo int ha m'fina >  $\delta$ .

IN PRATICA ... inutile scegliere  $\delta < \beta^{b-m}$