Es: $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

- eq normali
- soluz delle eq normali
- migliore approx di v in W nel senso dei m.q

(Sol: ...)

Es: V, v come nell' Es precedente; $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

- eq normali e soluz
- migliore approx ...

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- verif che $Ax = b$ non ha soluz
- soluz di $Ax = b$ nel senso dei m.q.
- soluz di $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ nel senso dei m. q.

(Oss: sist equivalenti, ma ...)

Oss (pseudoinversa):

$A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $n \geq k$, $b \in \mathbb{R}^n$

$= (a_1, \dots, a_k)$, colonne lin indip.

- LA soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei m.q. è

$$x^* = \boxed{(A^T A)^{-1} A^T} b$$

PSEUDOINVERSA di A $(A^+) \in \mathbb{R}^{k \times n}$

- SE $n = k$ si ha $A^+ = A^{-1}$
- LA proiez ortogonale di b su $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ è $Ax^* = AA^+ b$

Es: $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ps canonico in V)

- W è un piano: determ eq cartesiana;
- determ v^*, proiez ortogonale di v su W;
- posto $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, determ A^+.

Sol: • si cercano gli $x \in \mathbb{R}^3$ t.c. i vett $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x$ sono lin dip

ovvero t.c. $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{bmatrix} = 0$

Poichè $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 + x_1 \end{bmatrix}$ (fatt LR determ con EG)

si ha: $\boxed{x_3 - x_2 + x_1 = 0}$

- Le coord di v^* risp a $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ si determinano come soluz nel senso dei min quadr del sist:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ovvero come soluz delle eq.ni normali: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

sist. equivalenti: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad v^* = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- $A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$; $A^+ b = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, come doveva