Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2{,}4 \end{bmatrix}$;

- $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico
- $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim W = 2$
- $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2{,}4 \end{bmatrix} = b$

la migliore appross di v in W è $v^* \in W$ tale che

$$\forall w' \in W, \ \| v - v^* \|^2 \leq \| v - w' \|^2$$

MA: $W = \{ Ax \in \mathbb{R}^3, \ x \in \mathbb{R}^2 \}$

dunque la condiz precedente equivale a

i coefficienti della migliore appross di v in W sono le $x^* \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \ \| b - Ax^* \|^2 \leq \| b - Ax \|^2$$

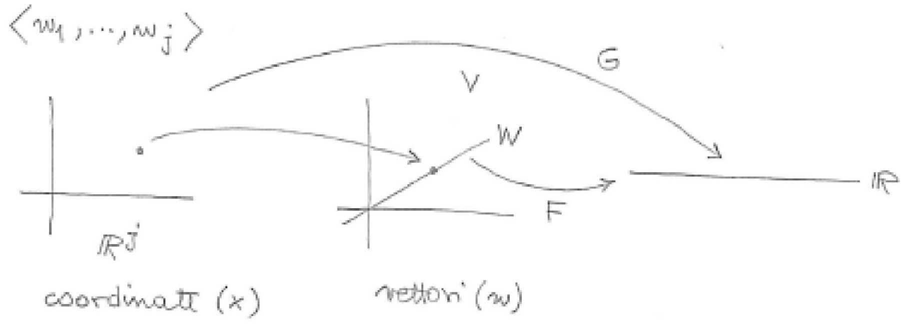
ovvero le soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei m.q.

TEO $\Rightarrow$ esistono soluz di $Ax=b$ nel senso dei m.q;
- una sola se e solo se colonne di A lin indip
- infinite se colonne di A lin dip

Oss (versione analitica del pb dei minimi quadrati):
- V sp vett su $\mathbb{R}$ con ps, $v \in V$
- W ssv di V con $\dim W < +\infty$
- $F : W \to \mathbb{R}$ t.c. $F(w) = \| v - w \|^2$

(1) TEO $\Rightarrow$ la funz F ha minimo (assoluto) in v^* pr ort di v su W

(2) $W = \langle w_1, \dots, w_j \rangle$



$G : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = F(x_1 w_1 + \dots + x_j w_j)$

- v^* minimo di F
- x^* t.c. $x_1^* w_1 + \dots + x_j^* w_j = v^* \Rightarrow x^*$ minimo di G

$$\left[x \neq x^* \Rightarrow G(x) = F(x_1 w_1 + \dots + x_j w_j) \geq F(v^*) = G(x^*) \right]$$

- SE $w_1, \dots, w_j$ BASE, x^* unico elem di $\mathbb{R}^j$ che rende minima G, ALTRIMENTI $\exists$ infiniti elem di $\mathbb{R}^j$ che ...

Oss: V, v come sopra, $W = \langle w_1, \dots, w_j \rangle$ s.s.v di V.
- v^* pr ort di v su $W \Leftrightarrow v - v^* \perp W$

ovvero $\Leftrightarrow \forall s = 1, \dots, j : (v - v^*) \cdot w_s = 0$ cioè: $v^* \cdot w_s = v \cdot w_s$

- le coord di v^* sono dunque individuate da:

$$a_1 w_1 + \dots + a_j w_j = v^* \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} \text{ soluz del sist } \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \cdot w_1 & \cdots & w_j \cdot w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ w_1 \cdot w_j & \cdots & w_j \cdot w_j \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} v \cdot w_1 \\ \vdots \\ v \cdot w_j \end{bmatrix}}_{\text{EQUAZIONI NORMALI}}$$

Oss: la matr del sist è SIMMETRICA.

Oss: $A = (a_1, \dots, a_j) \in \mathbb{R}^{n \times j}$, $n \geq j$, $b \in \mathbb{R}^n$

- $V = \mathbb{R}^n$ cn p.s canonico , $v = b$
- $W = \langle a_1, \dots, a_j \rangle \subset \mathbb{R}^n$
- l'elemento di W migliore approx di $v = b$ nel senso dei m.q. è la pr ort di b su W
- le coord della pr ort di b su W sono tutte le colonne soluz del sist delle eq normali:

$$(A^T A)x = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & \cdots & a_j \cdot a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 \cdot a_j & \cdots & a_j \cdot a_j \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \cdot a_1 \\ \vdots \\ b \cdot a_j \end{bmatrix}$$

RICORDARE che:

$a, b \in \mathbb{R}^n$

$a \cdot b = b^T a$

- la matr $A^T A$ è simmetrica semidef positiva ($\forall v \in \mathbb{R}^j$, $A^T A v \cdot v \geq 0$)
- SE colonne di A lin indip ALLORA è def positiva ($\Rightarrow$ invertibile)

---

def (funz che meglio approssima i dati nel senso dei m.q.)

dati: $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$, G s.s.v di $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ di dim finita;

$g \in G$ è un elem di G che meglio approssima i dati nel senso dei m.q se:

$$\forall \tilde{g} \in G, \quad (\tilde{g}(x_0) - y_0)^2 + \dots + (\tilde{g}(x_k) - y_k)^2 \geq (g(x_0) - y_0)^2 + \dots + (g(x_k) - y_k)^2$$

Es: determ gli elem di $P_1(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati $(-1,0), (0,0), (1,1)$ nel senso dei m.q.

Sol: $P_1(\mathbb{R}) = \langle 1, x \rangle$; $p(x) = a_0 + a_1 x$

$$(p(-1) - 0)^2 + (p(0) - 0)^2 + (p(1) - 1)^2 = \left\| \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2 =$$

(norma ottenuta da p.s canonico in $\mathbb{R}^3$)

$$= \left\| \begin{bmatrix} a_0 + a_1(-1) \\ a_0 + a_1(0) \\ a_0 + a_1(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2$$

ovvero, posto $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: $= \left\| A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} - b \right\|^2$

I coeff a_0, a_1 che individuano gli elem di $P_1(\mathbb{R})$ cercati sono q.l. le soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei min quadr.