(B) ricostr con f cont lin a tratti:

base di S ...

$$|r(\delta)| = |\delta_0 s_0(t) + \dots + \delta_k s_k(t)|$$

$$\le |\delta_0|\,|s_0(t)| + \dots + |\delta_k|\,|s_k(t)| \le \max\{|\delta_0|, \dots, |\delta_k|\}$$

$$\boxed{|s_0(t)| + \dots + |s_k(t)| = s_0(t) + \dots + s_k(t) = 1}$$

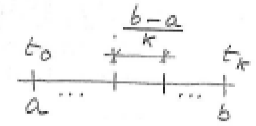
OVVERO: Nel caso di ricostr con int polinomiali il condiz è tanto peggiore quanto più k è grande; nel caso di ricostr con f cont lin a tratti il condiz è sempre buono.

Es (appross numerica di integrali):

dati: $[a,b] \subset \mathbb{R}$; $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$

determ $\int_a^b f(t)\,dt$ $\quad \left[\text{Es: } \int_0^1 e^{-t^2}\,dt\right]$

- k int ≥ 1, $\quad x_j = a + \frac{b-a}{k} j$, $\quad j = 0, \dots, k$



- r f di ricostr con f cont lin a tratti su $I_1 = [x_0, x_1], \dots, I_k = [x_{k-1}, x_k]$
- $s(x) = r(c(f))(x) = f(x_0) s_0(x) + \dots + f(x_k) s_k(x)$
- $e(f) = \max_{[a,b]} |f(x) - s(x)| \le \frac{M_2}{8} \left(\frac{b-a}{k}\right)^2$
- $I = \int_a^b f(t)\,dt$, $\quad J_k = \int_a^b s(t)\,dt$

$$\Rightarrow |I - J_k| = \left|\int_a^b (f(t) - s(t))\,dt\right| \le \int_a^b |f(t) - s(t)|\,dt$$

$$\le \int_a^b \max_{[a,b]} |f(t) - s(t)|\,dt = (b-a) \max_{[a,b]} |f(x) - s(x)|$$

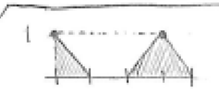
$$\le \frac{M_2}{8} \frac{(b-a)^3}{k^2}$$

$$\boxed{\text{Oss: } \forall \delta > 0, \exists k \text{ t.c. } |I - J_k| < \delta}$$

- $J_k = \int_a^b s(t)\,dt = \int_a^b \big(f(x_0) s_0(t) + \dots + f(x_k) s_k(t)\big)\,dt$

$$= f(x_0) \int_a^b s_0(t)\,dt + \dots + f(x_k) \int_a^b s_k(t)\,dt$$

$$\underbrace{= \frac{b-a}{k} \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + \frac{1}{2} f(x_k)\right]}_{\text{calcolo "elementare"!}}$$

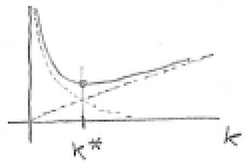


$$\int_a^b s_n(t) = \begin{cases} \frac{b-a}{2k} & n = 0, k \\ \frac{b-a}{k} & 0 < n < k \end{cases}$$

- Si approssima I con J_k, scegliendo k suff grande.

Oss: Φ_k funz utilizz dal calc per approx J_k;

- $|I-\Phi_k| = |I - J_k + J_k - \Phi_k| \le \underbrace{|I-J_k|}_{\int \approx \Sigma} + \underbrace{|J_k-\Phi_k|}_{\Sigma \approx \oplus \dots \oplus}$
- $|I-J_k| = \dfrac{c}{k^2}$
- $|J_k-\Phi_k| = c'k$ SE "tutto va bene"

$\Rightarrow$ 

$\exists\, k^*$ che rende minimo $\dfrac{c}{k^2} + c'k$

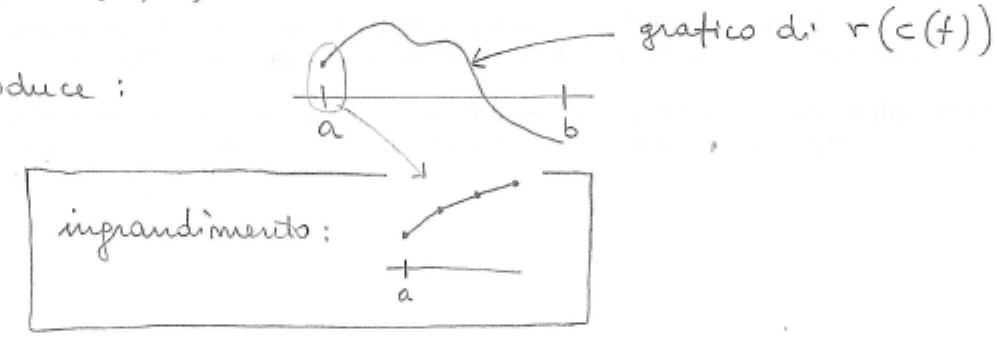
Es (grafico di f):

dati: $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$

determ il grafico di f su $[a,b]$.

- k int ≥ 1, $x_j = a + \frac{b-a}{k} j$, $j = 0,\dots,k$; r f di ricostr con f cont...
- $x = (x_0,\dots,x_k)^T$, $F = c(f) = (f(x_0),\dots,f(x_k))^T$
- > plot(x, F)

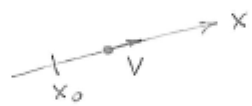
produce:



- Pb: come scegliere k?

4 APPROSSIMAZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI

Es: punto materiale che si muove di MOTO UNIFORME su una retta, con velocità V e posizione x_0 per $t=0$



Pb: risultati di misure...

$x(1) = 1$
$x(2) = 1{,}5$ determ V e x_0
$x(4) = 2{,}4$

Soluz: moto uniforme $\Rightarrow$ $x(t) = x_0 + Vt \in \langle 1, t\rangle$

Cerchiamo α_0, α_1 t.c. $\alpha_0 + \alpha_1 t$ int i dati...

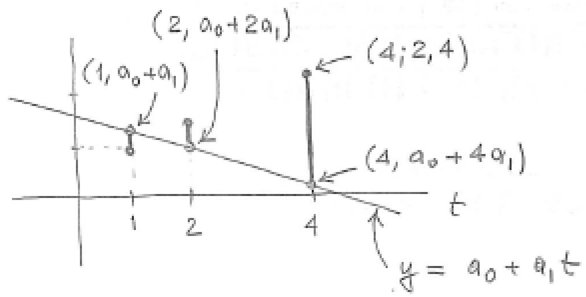
$\Rightarrow$ α_0, α_1 soluz di: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2{,}4 \end{bmatrix}$ $(A\alpha = b)$ SISTEMA INCOMPATIBILE

- Ragionevole perché dati ottenuti da misure...
- RIPIEGO: cerco α_0, α_1 che "minimizza l'errore"... $A\alpha - b$

def: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n > m$, $b \in \mathbb{R}^n$;
$v \in \mathbb{R}^m$ SOLUZIONE di $Ax=b$ NEL SENSO DEI MINIMI QUADRATI se $\forall w \in \mathbb{R}^m$, $\|Aw - b\|_2 \ge \|Av - b\|_2$ (ovvero: $\|\dots\|_2^2 \ge \|\dots\|_2^2$)

Oss: $x^* \in \mathbb{R}^m$ è SOLUZIONE di $Ax=b$ significa $Ax^* - b = 0$;
dunque: $\boxed{\text{SOLUZIONE} \Rightarrow \text{SOLUZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI}}$

Es (continua, int geom dell'errore $A\alpha - b$)



- le componenti del vettore $A\alpha - b$ sono, a parte il segno, le lunghezze dei segmenti marcati in figura; tra tutte le rette si cercano quelle che rendono minima la somma dei quadrati delle lunghezze.