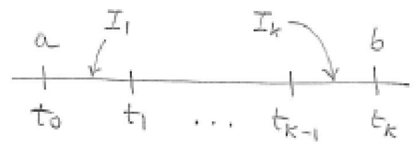
$\Rightarrow$ ricostr con int polinomiale soddisf solo per POCHE funzioni molto regolari.

ALTERNATIVA : ricostr con funzioni continue lineari a tratti

def (f lin a tratti): $a < b \in \mathbb{R}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$,

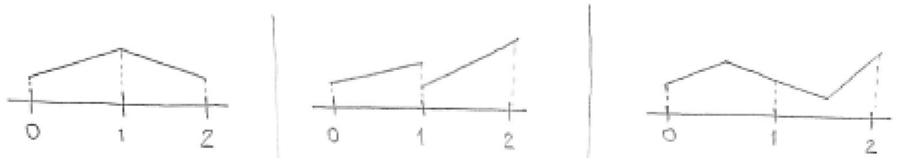
$I_j = [t_{j-1}, t_j]$

$j = 1, \dots, k$



- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una f CONTINUA LINEARE A TRATTI (su $I_1, \dots, I_k$) $\boxed{\text{SE}}$
  - f è continua su $[a,b]$
  - $\forall j = 1, \dots, k \ \exists \ p_j \in P_1(\mathbb{R})$ t.c. $f = p_j$ su I_j

Es :



sì — no cont — non su $[0,1], [1,2]$ ...

Oss : $[a,b] \subset \mathbb{R}$; $t_0, \dots, t_k \in [a,b]$ distinti... ; $I_1, \dots, I_k$ ...

$S = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue lin a tratti su $I_1, \dots, I_k \}$

(A) S è sottosp vett di $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ (dim ...)

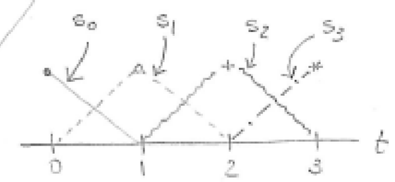
(B) $\forall \ y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$, $\exists$ un solo elem di S che interpola i dati $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$

[dim : $\forall j \ \exists! \ p_j \in P_1(\mathbb{R})$ che interpola $(t_{j-1}, y_{j-1}), (t_j, y_j)$, e la f risulta cont su $[a,b]$.]

(C) $s_0, \dots, s_k \in S$ t.c. $s_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

- $s_0, \dots, s_k$ sono base di S (dim ...)
- dim S = k+1

Es : $[0,3]$; $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [1,2]$, $I_3 = [2,3]$



- determ $\sigma \in S$ che int i dati $(0,2), (1,-6), (2,0), (3,-1)$.

Oss (ricostr mediante f cont lin a tratti)

$[a,b]$, $a = t_0, \dots, t_k = b$, S f cont lin a tratti su $I_1 = [t_0, t_1], \dots$

- $r : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ t.c. $r : \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \to$ l'elem di S che int $(t_0, y_0), \dots (t_k, y_k)$

(1) r è f di ricostr rel a c (dim ...)

(2) $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$, $M_2 = \max \{ \ |f^{(2)}(t)|, \ t \in [a,b] \}$

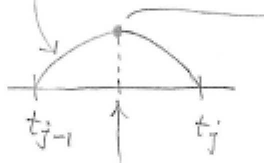
$\forall \ t \in I_j$, $\left| f(t) - r(c(f))(t) \right| = \left| f(t) - p_j(t) \right| \leq$

usando teo err ricostr int polinomiale

p_j : l'elem di $P_1(\mathbb{R})$ che int $(t_{j-1}, f(t_{j-1})), (t_j, f(t_j))$

$$\le \frac{M_2}{2}\underbrace{|t-t_{j-1}|\,|t-t_j|} \le \frac{M_2}{2}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{2}\right)^2$$

$\frac{t_{j-1}+t_j}{2}$



$\Rightarrow$ posto $h(k)=\max\{t_1-t_0,\ t_2-t_1,\dots,t_k-t_{k-1}\}$

si ha: $\boxed{e(f) \le \frac{M_2}{8}\,h(k)^2}$

Oss: $\forall f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$: <u>se</u> strategia di scelta degli ist di camp è t.c. $\lim_{k\to\infty} h(k)=0$ <u>allora</u> $\lim_{k\to\infty} e(f)=0$

Es:

- $t_j = a + \frac{b-a}{k}\,j$, $j=0,\dots,k$

  $h(k) = \frac{b-a}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} h(k) = 0$

- $[a,b]=[0,1]$, $t_j = \frac{j}{j+1}$, $j=0,\dots,k-1$, $t_k=1$

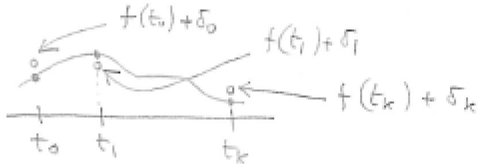
  $h(k) = 1/2 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} h(k) \neq 0$

Oss (condiz del pb della ricostruzione):

$[a,b]$; $t_0,\dots,t_k$; c f di camp; r f di ricostr

$\delta_0,\dots,\delta_k \in \mathbb{R}$; $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

- $\hat{r}(t) = r(c(f)+\delta)$



- $\underbrace{|\hat{r}(t) - r(c(f))|}_{\text{errore assoluto, all'ist } t\text{, commesso ricostruendo dati "errati"}} = |r(\delta)|$

(A) ricostr con int polin: base di Lagrange di $P_k(\mathbb{R})$

$$|r(\delta)| = |\delta_0 \ell_0(t)+\dots+\delta_k \ell_k(t)|$$
$$\le |\delta_0|\,|\ell_0(t)|+\dots+|\delta_k|\,|\ell_k(t)|$$
$$\le \max\{|\delta_0|,\dots,|\delta_k|\}\,\underbrace{\left(|\ell_0(t)|+\dots+|\ell_k(t)|\right)}$$

$\max\{|\ell_0(t)|+\dots+|\ell_k(t)|,\ t\in[a,b]\} \ge C\log k$

Oss: $\exists\, t\in[a,b]$, $\delta_0,\dots,\delta_k\in\mathbb{R}$ t.c. $|r(\delta)| = \max|\delta_j|\,\max\{|\ell_0|+\dots+|\ell_k|\}$

(B) ricostr con f cont lin a tratti: base di S…

$$|r(\delta)| = |\delta_0 s_0(t)+\dots+\delta_k s_k(t)|$$
$$\le |\delta_0|\,|s_0(t)|+\dots+|\delta_k|\,|s_k(t)| \le \max\{|\delta_0|,\dots,|\delta_k|\}$$

$\boxed{|s_0(t)|+\dots+|s_k(t)| = s_0(t)+\dots+s_k(t) = 1}$

<u>OVVERO</u>: Nel caso di ricostr con int polinomiale il condiz è <u>tanto peggiore quanto più k è grande</u>; nel caso di ricostr con f cont lin a tratti il condiz è <u>sempre buono</u>.