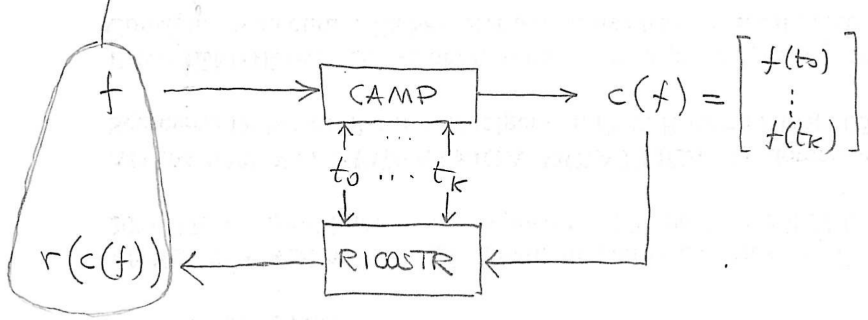
def (err di ricostruzione): $[a,b]$ int non degenere;

$t_0, \dots, t_k$ ist di camp; c f di camp; r f di ricostruz

$$e : \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.}$$

$$e(f) = \max_{[a,b]} \left| f(t) - r(c(f))(t) \right|$$

ERRORE di RICOSTRUZIONE



TEO (errore di ricostr dell'int polinomiale)

k int ≥ 0; $t_0, \dots, t_k \in [a,b]$, distinti;

$f \in \mathcal{C}^{k+1}([a,b], \mathbb{R})$; $p_k \in P_k(\mathbb{R})$ che int i dati $(t_j, f(t_j))$

$\forall t \in [a,b]$, $\exists \theta \in [a,b]$ t.c.

$$f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} (t - t_0) \cdots (t - t_k)$$

(dim: no.)

Es: $[a,b] = [0, 2\pi]$; $f(t) = \operatorname{sen} \omega t$, $\omega > 0$

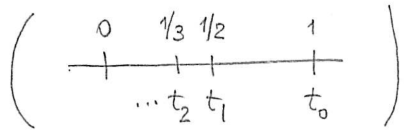
- $\forall j$ int positivo, $\max\{ |f^{(j)}(t)|, t \in [0, 2\pi] \} = \omega^j$
- $\forall \tau \in [0, 2\pi]$, $|t - \tau| \leq 2\pi$

$$\Rightarrow e(f) \leq \frac{\omega^{k+1}}{(k+1)!} (2\pi)^{k+1} \quad \text{e} \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{(2\pi\omega)^{k+1}}{(k+1)!} = 0$$

OVVERO: l'errore di ricostruz può essere reso arb piccolo scegliendo suff grande il # di ist di campionam; l'unico vincolo sugli ist di camp è che siano distinti.

Es: $[a,b] = [0,1]$; $f(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{\pi}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$

- $t_j = \dfrac{1}{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \dots$



- $f(t_j) = \dfrac{1}{j+1} \operatorname{sen}[(j+1)\pi] = 0 \Rightarrow$ dati da interp: $(t_0, 0), (t_1, 0), \dots$

$\Rightarrow \forall$ f di ricostr r: $r(c(f)) = 0$.

Q.di: $e(f) = \max\{ |f(t)|, t \in [0,1] \} > 0$ INDIP da k

OVVERO: $\exists$ funz e strategie di scelta degli ist di camp t.c. $\lim_{k \to \infty} e(f) \not\to 0$.

Oss: in generale…

- se $\max\{ |f^{(j)}(t)|, t \in [a,b] \}$ non cresce troppo rapidam con j [Es: $\dots < L^j$, $L > 0$]

  allora $\lim_{k \to \infty} e(f) = 0$ con qualsiasi strategia di scelta dei c.

- $\forall f$ continua, $\exists$ strategia di scelta dei t_j t.c. $\lim_{k \to \infty} e(f) = 0$ [… ma QUALE ?];
- $\forall$ strategia di scelta dei t_j, $\exists f$ continua t.c. $\lim_{k \to \infty} e(f) \neq 0$.