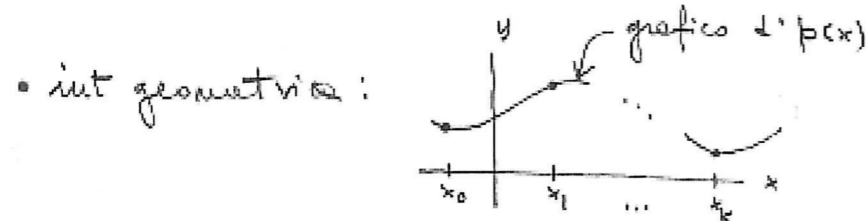


3 INTERPOLAZIONE

Pb (dell'interpolazione polinomiale):

- dati
- k intero ≥ 0
 - $P_k(\mathbb{R}) =$ insieme di polinomi a coeff in \mathbb{R} , di grado $\leq k$
(sottoinsieme delle f continue da \mathbb{R} in \mathbb{R})
 - $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, distinti
 - $y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$

determina $p \in P_k(\mathbb{R})$ t.c. $p(x_0) = y_0, \dots, p(x_k) = y_k$
("che interpoli i dati $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ ")



Assegnati $k+1$ punti — di coord $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ —
determina $p \in P_k(\mathbb{R})$ il cui grafico contiene i punti.

Es: $k=2$, dati $(-1, 0), (0, 1), (2, -2)$

• $-x^2 + 6x + 1$ non è soluz del Pb...

• $P_2(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1x + a_2x^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

← RAPPRESENTAZ
PARAMETRICA
di $P_2(\mathbb{R})$

Riformulaz del Pb: cerca $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

t.c. il polin. individuato verifichi le tre condiz

$p(-1) = 0, p(0) = 1, p(2) = -2$

OVVERO de risolvere il sist di eq lin:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Oss: a_0, a_1, a_2 soluzioni del sistema

\Leftrightarrow
 $a_0 + a_1x + a_2x^2$ soluzioni del Pb di interp polin

Oss: $P_k(\mathbb{R}) = \langle q_0(x), \dots, q_k(x) \rangle$ (Ad Es: $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$)

cioè $P_k(\mathbb{R}) = \{ a_0q_0(x) + \dots + a_kq_k(x); a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R} \}$

ALLORA $a_0q_0(x) + \dots + a_kq_k(x)$ risolve il Pb di interp

$\Leftrightarrow (a_0, \dots, a_k)^T$ risolve il sist di eq. linear:

$$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \dots & q_k(x_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_0(x_k) & q_1(x_k) & \dots & q_k(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

TEO (esist ed unicità della soluz)

$\forall k; x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_k$

$\exists!$ $p \in P_k(\mathbb{R})$ che risolve il Pb dell'int polinom.

(dim: ... con base di Lagrange)

Es: determina l'elem di $P_2(\mathbb{R})$ che int i dati $(-1, 0), (0, 1), (2, -2)$...

A) ... usando base Lagrange

B) ... usando base Vandermonde

e verif che i polin trovati sono uguali.

Ds: basi diverse in $P_k(\mathbb{R}) \Rightarrow$ FORME diverse del p. che interpola.

Ds: $k=2$

- $P_2(\mathbb{R}) = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle$: base e forma di LAGRANGE (matr. identica)
- $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$: base e forma di VANDERMONDE (matr. di V_i)
- $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1) \rangle$: base e forma di NEWTON (matr. tr. inf)

Es: dati $(0,1), (-1,2), (3,10), (1,10)$

- determina la f di Newton del p. che interpola ("interpolanti")
- (per corsa) stessa cosa per dati permutati: $(3,10), (-1,2), (1,10), (0,1)$