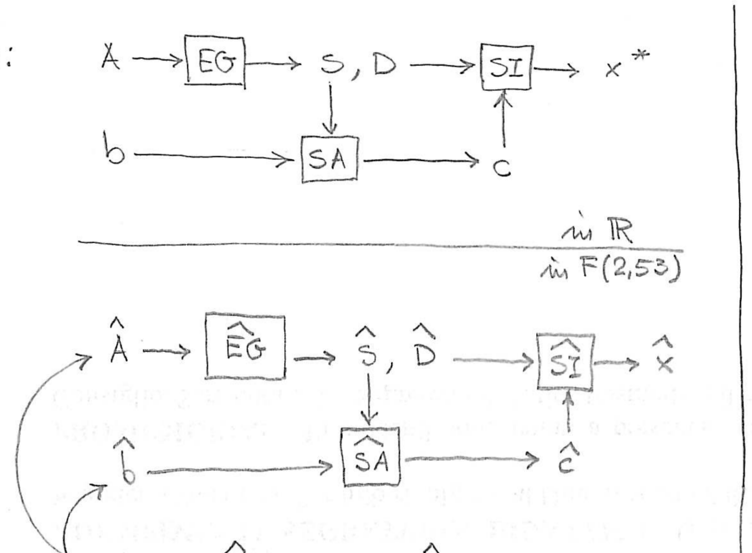
• STUDIO IN $F(2,53)$

OSS:



ad es: $\hat{A} = rd(A)$, $\hat{b} = rd(b)$

$$\varepsilon_D = \frac{\|\hat{D}-D\|}{\|D\|}, \quad \varepsilon_c = \frac{\|\hat{c}-c\|}{\|c\|}$$

$$D, \varepsilon_D;\ c, \varepsilon_c \longrightarrow \boxed{SI} \longrightarrow x^*, \varepsilon_d$$

$$\hat{x} = \widehat{SI}(\hat{D},\hat{c}), \quad x^* = SI(D,c)$$

$$\tilde{x} = SI(\hat{D},\hat{c})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_t = \frac{\|\hat{x}-x^*\|}{\|x^*\|} \le \underbrace{\frac{\|\hat{x}-\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|}}_{\varepsilon_a} \cdot \frac{\|\tilde{x}\|}{\|x^*\|} + \underbrace{\frac{\|\tilde{x}-x^*\|}{\|x^*\|}}_{\varepsilon_d}$$

$$\frac{\|\tilde{x}\|}{\|x^*\|} \le \frac{\|\tilde{x}-x^*\|}{\|x^*\|} + 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon_t \le \varepsilon_a + \varepsilon_d + \varepsilon_a \varepsilon_d$$

supponendo ε_a piccolo...

Teo (condiz, I) + Teo (condiz, II) $\Rightarrow$

- $\varepsilon_d \le c(D)\, \varepsilon_c \quad (\varepsilon_D = 0)$
- $\hat{\varepsilon}_d \le c(D)\, \varepsilon_D \quad (\varepsilon_c = 0)$

$\Rightarrow$ occorre studiare $c(D)$!

Es: $\gamma \in (0,1)$, $A(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1}(\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{bmatrix}$

- $c_\infty(A(\gamma)) = (1+\gamma)^2 < 4$ (numero di condiz basso)
- EG: $(S(\gamma), D(\gamma)) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\gamma & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & -1/\gamma \end{bmatrix} \right)$
- $c_\infty(D(\gamma)) \ge \frac{1}{\gamma^2}$ NON LIMITATO per $\gamma \in (0,1)$

OSS: EGPP (EG con Pivoting Parziale)

"al passo k, si utilizza come pivot: $\max_{i \ge k} |a_{ik}^{(k)}|$"

Es (continua):

- EGPP: $(P, S(\gamma), D(\gamma)) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

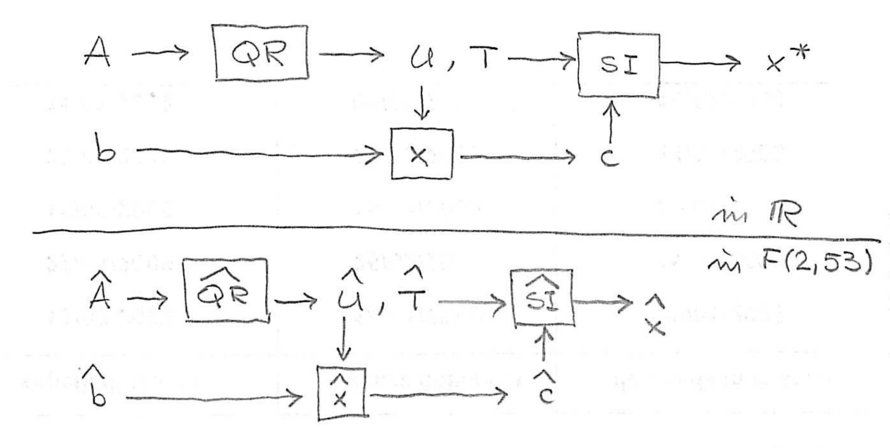
  con $c_\infty(D) = 1$

In generale, con EGPP si ottiene $\boxed{c(D) \le n 2^n c(A)}$

Es (per casa): $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tr sup; verif che $\|T\|_\infty \ge \max_k |t_{kk}|$ e quindi che, se T invert, che $\|T^{-1}\|_\infty \ge \max_k |t_{kk}^{-1}|$.

$$\Rightarrow c_\infty(T) \ge \frac{\max |t_{kk}|}{\min |t_{kk}|}$$

OSS:



$\varepsilon_T, \varepsilon_c \ldots$

$$T, \varepsilon_T;\ c, \varepsilon_c \longrightarrow \boxed{SI} \longrightarrow x^*, \varepsilon_d$$

Teo condiz $\Rightarrow$

- $\varepsilon_d \le c(T)\, \varepsilon_T \quad (\varepsilon_c = 0)$
- $\hat{\varepsilon}_d \le c(T)\, \varepsilon_c \quad (\varepsilon_T = 0)$

$\Rightarrow$ occorre studiare $c(T)$!

Oss: $(\mathbb{R}^n, N_2)$ • $T = U^T A \Rightarrow \|T\|_2 \leq \|A\|_2$

• $T^{-1} = A^{-1} U \Rightarrow \|T^{-1}\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2$

$\Rightarrow \boxed{c_2(T) \leq c_2(A)}$

Es (per caso): U ortogonale $\Rightarrow \|U\|_2 = 1$

Oss: sussiste il seg

TEO: $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ottenuto dalla procedura

(I) $(\hat{S}, \hat{D}) = \widehat{EG}(A)$

(II) $\hat{c} = \widehat{SA}(\hat{S}, b)$

(III) $\hat{x} = \widehat{SI}(\hat{D}, \hat{c})$

Allora: $\exists\ \delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- $\|\delta A\| \leq n u \|\hat{S}\| \|\hat{D}\|$ [u precis di macchina]
- $(A + \delta A)\hat{x} = b$

OVVERO: $\hat{x}$ è la soluz CALCOLATA op in $\mathbb{R}$ di un sist di eq ottenuto perturbando "poco" la matrice del sist originario.

Oss (int fisico): se il sist $Ax = b$ ha origine fisica, i dati A e b sono affetti da errore; se $\delta A \approx$ errore di origine fisica, allora $\hat{x}$ è "fisicam significativa"