Oss: $\mathbb{R}^{n\times n}$ sp vett su $\mathbb{R}$ di dim n^2;

N norma in $\mathbb{R}^n \Rightarrow f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(M) = \|M\|_N$ è norma in $\mathbb{R}^{n\times n}$

(dim: f verifica le propr N1, N2 ed N3)

Es (norme in $\mathbb{R}^{n\times n}$): $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di comp m_{ij} ($\sim$ vettore di $\mathbb{R}^{n^2}$...)

(1) $f_1 : M \to \sum_{i,j} |m_{ij}|$

(2) $f_2 : M \to \sqrt{\sum_{i,j} |m_{ij}|^2}$ (FROBENIUS)

(∞) $f_\infty : M \to \max\{|m_{11}|, \dots, |m_{nn}|\}$

> Oss: f_1, f_2 non sono indotte [$\nexists$ norma in $\mathbb{R}^n$ t.c. ...]:
> $f_1(I) = n$; $f_2(I) = \sqrt{n}$
> se fossero indotte sarebbe $= 1$.

- PROPRIETÀ delle NORME INDOTTE: $\mathbb{R}^n, N$

(I) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, v \in \mathbb{R}^n$: $N(Av) \leq \|A\|_N \, N(v)$

> Es (per casa): dimostrare usando la def di norma indotta.

(II) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|AB\|_N \leq \|A\|_N \, \|B\|_N$ (dim: no)

> Oss: f_∞ non indotta:
> $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(III) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|A\|_N = \max\{N(Av),\ N(v) = 1\}$

$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert: $\|A^{-1}\|_N = \left(\min\{N(Av),\ N(v)=1\}\right)^{-1}$

Es:

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile; $A^{-1}A = I \Rightarrow \|A^{-1}\|_N \geq \|A\|_N^{-1}$
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert, $b \in \mathbb{R}^n$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax^* = b$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|b\|_N}{\|A\|_N} \leq \|x^*\|_N \leq \|A^{-1}\|_N \, \|b\|_N$$

- CONDIZIONAMENTO

dati: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert, $b \in \mathbb{R}^n$

soluz: x^* t.c. $Ax^* = b$

dati perturbati: $A + \delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert, $b + \delta b \in \mathbb{R}^n$

PERTURBAZIONE dei dati

soluz: $\hat{x}$ t.c. $(A + \delta A)\hat{x} = b + \delta b$

> Es: $A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $A + \delta A = \begin{bmatrix} 9 & 6{,}1 \\ -1 & 3{,}8 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta A = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}2 \end{bmatrix}$

Allora: $\hat{x} - x^* = (A + \delta A)^{-1}(b + \delta b) - A^{-1}b = F(A, b; \delta A, \delta b)$

Pb: studiare F