<u>Oss</u> (uso QR per soluz sist): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

(1) $(U,T) = QR(A)$
(2) $c = U^T b$
(3) $x = SI(T, c)$

procedura SODDISFACENTE:
SE A invert, TROVA x
SE A non invert, SI ARRESTA

---

da fare:
- CONDIZIONAMENTO
- studio in $F(2,53)$
- COSTO

<u>Preliminare</u>: norme in $\mathbb{R}^n$ e norme di matrici

già noto: $\mathbb{R}^n$ sp vett su $\mathbb{R}$ con p.s. canonico

$N: v \to \sqrt{v \circ v} = \| v \| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$

- NORMA EUCLIDEA di v, $\|v\|_2$, $N_2(v)$

<u>def</u> (norma, sp normato)

V sp vett su $\mathbb{R}$, $N: V \to \mathbb{R}$ <u>norma</u> in V se:

(N1) $\forall v \in V$: $N(v) \geq 0$ e $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$

(N2) $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$: $N(\alpha v) = |\alpha| \, N(v)$

(N3) $\forall v, w \in V$: $N(v+w) \leq N(v) + N(w)$ [disug triangolare...]

(V,N) si dice SPAZIO NORMATO

<u>Es</u> (altre norme in $\mathbb{R}^n$): $N_1: v \to |v_1| + \dots + |v_n| = \|v\|_1$

$N_\infty: v \to \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} = \|v\|_\infty$

<u>Es</u> (1) verif che N_1 è norma (Sol: ...)
(2) per casa: verif che N_∞ è norma

<u>Oss</u>: N_1, N_∞ non derivano da p.s. in $\mathbb{R}^n$
(dim: Oss 0.37, p. 14)

<u>def</u> (intorno sferico): $I_N(\underset{\text{CENTRO}}{v}, \underset{\text{RAGGIO}}{r}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid N(x - v) \leq r \}$

<u>Es</u>: disegnare $I_N(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ per $N_1, N_2, N_\infty \dots$

<u>def</u> (norma di matrice): Si cons $\mathbb{R}^n$ con norma N; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|A\|_N = \sup \left\{ \frac{N(Av)}{N(v)}, \; v \neq 0 \right\}$$

<u>norma di A</u> INDOTTA da N

<u>Es</u>: $\mathbb{R}^n, N$; $\|I\|_N = 1$

<u>Oss</u>: $\sup\{\#\} < +\infty$; <u>Es</u>: $N_\infty(Av) \leq [N_\infty(a_1) + \dots] \, N_\infty(v)$

<u>Oss</u> (formule di calcolo):

$N_1(A) = \max\{N_1(a_1), \dots, N_1(a_n)\} = \|A\|_1$

$N_\infty(A) = \max\{N_1(r_1^T), \dots, N_1(r_n^T)\} = \|A\|_\infty \; (= \|A^T\|_1)$

$N_2(A) = \sqrt{\max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ autovalore di } A^TA\}}$

<u>Oss</u>: A^TA è simm semidef pos $\Rightarrow$ autov ≥ 0

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $\|A\|_1 = \max\{3, 2\} = 3$
- $\|A\|_\infty = \max\{4, 1\} = 4$
- $A^TA = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ SDP; $\|A\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}}$.