

CARATTERIZZAZIONE matrici SDP

OSS: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, SDP. Allora la fatt LR di A è t.c.

(I) $D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn}) S^T$

(II) $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0 \quad [\Rightarrow \det A > 0] \dots \quad (\underline{d_{ii}}; \dots)$

OSS: A simmetrica. Se $(S, D) = EG(A)$ [EG è def in A] e $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ allora A è SDP.

(d_{ii} ; ...)

TEO (caratt matrici SDP):

A simmetrica.

SDP \Leftrightarrow

EG def in A e $(S, D) = EG(A)$ con $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ ①

$\Leftrightarrow \det A[k] > 0$ per $k=1, \dots, n$ ②

\leftarrow *

d_{ii} : SDP \Leftrightarrow ① segue dalle Oss precedenti;

SDP \Rightarrow ② da PROPRIETA' (I) lez precedenti \oplus (II) Oss prec;

② \Rightarrow SDP perche' ② \Rightarrow ① ...

ES: $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ t.c. $A(x) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & x & x \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$

determi per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ risulta SDP

\leftarrow *

\Leftrightarrow

$\exists L$ tr inf con $l_{kk} > 0, k=1, \dots, n$ t.c. $A = LL^T$ ③

d_{ii} : SDP \Rightarrow ③ da Oss (I) e poi $A = S \sqrt{\text{diag}(d_{11} \dots d_{nn})} \sqrt{\dots} S^T$
 \uparrow L

③ \Rightarrow SDP dalle def ...