

Oss: $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $v_k \neq 0$; posto

$$l = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_k; \frac{v_{k+1}}{v_k}, \dots, \frac{v_n}{v_k} \right)^T \in \mathbb{R}^n$$

$H = I - l e_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si ha:

- H è tr inf con $h_{jj} = 1$, $j = 1, \dots, n$ (\Rightarrow invertibile)
- $Hv = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)^T$
- $\forall w \in \mathbb{R}^n$ t.c. $w_k = 0$ si ha $Hw = w$

Per semplificare la dipendenza da v e k , indichiamo la matrice H con la sigla $\lambda(v, k)$.

Es: $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $k=2$; $v_2 \neq 0$, $l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $l e_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0, l, 0, 0)$

$$\lambda \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, 2 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

descrizione della funzione EG (operando in \mathbb{R})

$(S, D) = EG(A)$

dati: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

$A^{(1)} = A$;

per $k = 1, \dots, n-1$ ripetere

se $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ allora (O.M: $a_{kk}^{(k)}$ si chiama PIVOT)

• $H_k = \lambda(a_k^{(k)}, k)$;

• $A^{(k+1)} = H_k A^{(k)}$

altrimenti STOP

uscita: $S = H_1^{-1} \dots H_{n-1}^{-1}$; $D = A^{(n)}$

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^{(1)} = A$

• $k=1$, $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$; $H_1 = \lambda \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, 1 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

• $k=2$, $a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0$; $H_2 = \lambda \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, 2 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$EG(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

Oss: • $A^{(n)}$ è tr sup

• H_k^{-1} è tr inf con 1 sulla diag ($k=1, \dots, n-1$)

$\Rightarrow S = H_1^{-1} \dots H_{n-1}^{-1}$ è tr inf con $s_{kk} = 1$

Es (per caso): prodotto di matr tr inf con 1 sulla diag è tr inf con 1 sulla diag.

• $A^{(n)} = H_{n-1} \dots H_1 A \Rightarrow A = H_1^{-1} \dots H_{n-1}^{-1} A^{(n)} = S D$

• $d_{kk} = a_{kk}^{(k)}$ (k -esimo pivot)

Pb: non sempre EG è def (Es: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

Pb: non sempre EG e' def (Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

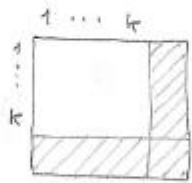
Da: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$; procedim per la soluzione del sistema $Ax = b \dots$

- | | |
|--|---|
| <p>(1) $(S, D) = EG(A)$
 (2) $c = SA(S, b)$
 (3) $x = SI(D, c)$</p> | <p>procedim NON SODDISFACENTE, in generale:
 <u>SE</u> passo (1) OK, <u>ALLORA</u> trova $x \Leftrightarrow A$ invertibile
 <u>MA</u> passo (1) può fallire anche se A invertibile!</p> |
|--|---|

• studio dell'inv di def di EG.

def (minori principali di testa)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$; $A[k]$ minore di A :
 "minore per di testa di A (di ordine k)"



TEO (inv di def di EG):

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; EG e' def in A ($\sim a_{kk}^{(k)} \neq 0$ per $k=1, \dots, n-1$)

$\Leftrightarrow \det A[k] \neq 0$ per $k=1, \dots, n-1$

(dim: no)

Es: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
 ND/i ND/i D/mi

Oss: il teo non parla di $\det A[n] = \det A$!

Oss: (1) se S, D e' fatt LR di A con $d_{kk} \neq 0$, $k=1, \dots, n-1$
 allora $\exists!$ fatt LR di A (dim: solo caso $d_{nn} \neq 0 \dots$)

\Rightarrow SE EG def in A ALLORA EG(A) e' l'unico fatt LR

(2) Sia A invert; EG non def in $A \Rightarrow \nexists$ fatt LR di A

dim (\exists fatt LR \Rightarrow EG def in A)

- Sia S, D fatt LR di A ;
- A invert $\Rightarrow D$ invert $\Rightarrow d_{kk} \neq 0, \forall k$;
- $A = SD \Rightarrow A[k] = S[k]D[k]$ (di'segnino...) $\Rightarrow \det A[k] = \det D[k] = d_{11} \dots d_{kk} \neq 0 \Rightarrow$ EG def in A (usando tes precedenti).

Situazione "grafica":

RELAZIONE EG / fatt LR \Rightarrow

