

1) ZERI di FUNZIONI REALI di UNA VARIABILE

Po: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, det $\alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha) = 0$

"ZERO di f"

• Metodo di bisezione

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cont; $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
 se $g(x_1)g(x_2) < 0 \Rightarrow \exists$ zero di g
 tra x_1 e x_2

idea: utilizz TEO esistenza zeri per ottenere una success di INTERVALLI I_k , ciascuno contenenti uno zero di f , t.c. $I_{k+1} \subset I_k$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mis } I_k = 0$.

descriz del m di binez (OPERANDO in \mathbb{R})

dati: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f(a)f(b) < 0$

$a_0 = a$; $b_0 = b$, $I_0 = [a_0, b_0]$, $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$;

per $k = 1, 2, \dots$ ripeti

se $f(x_{k-1}) = 0$ allora STOP altrimenti

• se $f(x_{k-1})f(b_{k-1}) < 0$ allora $a_k = x_{k-1}$, $b_k = b_{k-1}$;

• se $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ allora $a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_{k-1}$;

• $I_k = [a_k, b_k]$, $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$

uscita: quando un opportuno CRITERIO D'ARRESTO è verificato: x_k .

Des: $\text{mis } I_k = \frac{\text{mis } I_{k-1}}{2} = \frac{\text{mis } I_{k-2}}{2^2} = \dots = \frac{\text{mis } I_0}{2^k}$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mis } I_k = 0$

• SE f continua, ciascun I_k contiene uno zero

e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$ t.c. $f(\alpha) = 0$.

Des (criterio d'arresto ASSOLUTO):

• $\delta > 0$ assegnato, criterio d'arresto: $\text{mis } I_k < \delta$

1) $\text{mis } I_k$ è calcolabile: $\text{mis } I_k = b_k - a_k$

2) di sup certamente verif dopo # finito iteraz

3) SE f continua:

• $\exists \alpha \in I_k$ t.c. $f(\alpha) = 0$ (teo \exists zeri...)

• $|x_k - \alpha| \leq \text{mis } I_k < \delta$

ovvero: si è otten un'appross di α (zero di f) con ERRORE ASSOLUTO inferiore a δ .

Es: dato $\delta > 0$, determ k t.c. $\text{mis } I_k < \delta$

(ovvero: determ il numero di it da fare perché il cr d'arresto sia verificato)

(Sol. $k > \log_2 \text{mis } I_0 - \log_2 \delta$)

Des (criterio d'arresto RELATIVO):

• $\epsilon > 0$ assegnato, criterio d'arresto:

$I_k \neq 0$ e, posto $m_k = \min\{|a_k|, |b_k|\}$,
 $\frac{\text{mis } I_k}{m_k} < \epsilon$

1) è calcolabile ...

2) se $I_0 \neq 0$, di sup certamente verif dopo # finito iteraz ($\text{mis } I_k \rightarrow 0$ e $m_k \geq m_0$)

3) SE f continua:

• $\exists \alpha \in I_k$ t.c. $f(\alpha) = 0$

• $|\frac{x_k - \alpha}{\alpha}| \leq \frac{\text{mis } I_k}{m_k} < \epsilon$

ovvero: x_k approssima α con ERRORE RELATIVO inf a ϵ .

Es (per casa): dato $\epsilon > 0$ e $I_0 \neq 0$, determinare k t.c.

$$\frac{\max I_k}{m_k} < \epsilon \quad (\text{Sol: } k > \log_2 \max I_0 - \log_2 a_0 - \log_2 \epsilon)$$

Es (per casa): descrivere il comportamento del metodo di bisezione quando applicato alla funzione $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$ a partire da $I_0 = [0, 2]$.
