

Oss: x reale $\neq 0$, β intero ≥ 2 (BASE)

$\exists! b \in \mathbb{Z}$: $g = \frac{|x|}{\beta^b} \in [\beta^{-1}, 1)$
 (ESPOLENTE) (FRAZIONE)

ovvero: $\exists!$ scrittura di x nella forma $x = (-1)^s \beta^b g$
 con $s \in \{0,1\}$, $b \in \mathbb{Z}$, $g \in [\beta^{-1}, 1)$.

Oss: la condiz $g \in [\beta^{-1}, 1)$ si traduce con: la scrittura posizionale di g in base β ha la forma $0, c_1 c_2 \dots$ con $c_1 \neq 0$.

Es: $x = \frac{1}{10}$, $\beta = 10 \Rightarrow s = 0, b = 0, g = \frac{1}{10} = 0,1$
 scrittura posizionale di g in base dieci ("lunghezza 1")

$x = \frac{1}{10}$, $\beta = 2 \Rightarrow s = 0, b = -3, g = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,11001100\dots$
 scrittura posizionale di g in base due ("lunghezza infinita")

def (numeri in v. mobile; precisione)

- β intero ≥ 2 , m intero > 0

$F(\beta, m) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^s \beta^b 0, c_1 \dots c_m\}$
 con $s \in \{0,1\}$, $b \in \mathbb{Z}$
 $c_1, \dots, c_m \in \{0, \dots, \beta-1\}$, $c_1 \neq 0$

"insieme dei numeri in virgola mobile e precisione m , in base β "

scrittura posiz delle frazioni in base β

Es: $F(10, 1) = M$

- $\frac{1}{100} \in M$ perché $\frac{1}{100} = 10^{-1} 0,1$
- $\frac{11}{100} \notin M$ perché $\frac{11}{100} = 10^0 0,11$ e la frazione...
- tutti gli elem positivi di M con esponenti zero sono: $\{0,1; 0,2; \dots; 0,9\} = \mathcal{D}_3$
- tutti gli elem positivi di M con esponenti b sono: $\{10^b 0,1; 10^b 0,2; \dots; 10^b 0,9\} = 10^b \mathcal{D}_3$
- tutti quelli negativi con esponenti b sono: $\{-10^b 0,9; -10^b 0,8; \dots; -10^b 0,1\} = (-1) 10^b \mathcal{D}_3$
- $F(10, 1) = \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} (-1) 10^b \mathcal{D}_3 \cup \{0\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} 10^b \mathcal{D}_3$

Proprietà di $F(\beta, m) \subset \mathbb{R}$:

- numerabili e ordinato;
- simmetrico rispetto a zero;
- zero è p.to di accumulazione;
- $\sup F(\beta, m) = +\infty$, $\inf F(\beta, m) = -\infty$.

Es: 1) determ una success $\xi_k \in F(\beta, m)$

t.c. $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$ (Sol: $\xi_k = \beta^{-k} 0,1$)

2) ... t.c. $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = +\infty$ (Sol: $\xi_k = \beta^k 0,1$)

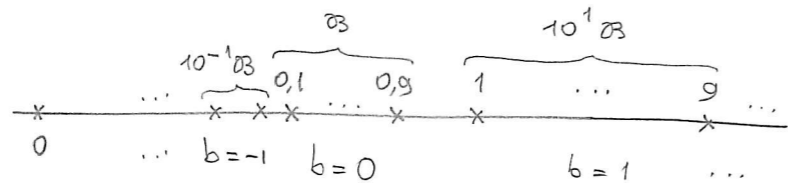
3) decidere se $\frac{7}{8} \in F(2, 2)$

Sol: (a) determ esp e fraz in base due: $b = 0, g = 7/8$
 (b) decidere se la fraz è compatibile con la precisione: non compatibile $\Rightarrow 7/8 \notin F(2, 2)$.

Oss (struttura geometrica di $F(\beta, m)$)

• Es: $F(10, 1)$, $\mathcal{B} = \{0, 1; 0, 2; \dots; 0, 9\}$

elem positivi:



Oss: $b \in \mathbb{Z}; \max\{10^b \mathcal{B}\} < \min\{10^{b+1} \mathcal{B}\}$

• def (f. successore, predecessore)

$\xi < \in F(\beta, m)$
 $\neq 0$

$\sigma(\xi) =$ "il primo ndm $> \xi$ "
 \uparrow SUCCESSORE di ξ

$\pi(\xi) =$ "il primo ndm $< \xi$ "
 \uparrow PREDECESSORE di ξ

Oss: $\sigma, \pi: F(\beta, m) \setminus \{0\} \rightarrow F(\beta, m) \setminus \{0\}$

e $\pi = \sigma^{-1}$

Es: $F(10, 3)$. Determin: $\sigma(10^{-2} 0,501)$, $\pi(10^{-2} 0,501)$
 $\sigma(10^4 0,100)$, $\pi(10^4 0,100)$

• (per casa): $F(2, 3)$. Determin: $\sigma(2^{-3} 0,101)$,
 $\pi(2^{-3} 0,101)$, $\sigma(2^{-3} 0,100)$, $\pi(2^{-3} 0,100)$;
 $\pi(-2^{-1} 0,110)$, $\sigma(2^{-1} 0,110)$ e verificare
 che $\pi(-2^{-1} 0,110) = -\sigma(2^{-1} 0,110)$
 (come mai?)

• TEO (distribuzione degli elem di $F(\beta, m)$)

$\xi = \beta^b g < \in F(\beta, m)$
 > 0

Allora: $\frac{\sigma(\xi) - \xi}{\beta^b} = \beta^{-m}$ (indip da ξ !!)

(lim: ...)