CN # 58,59 / 28 maggio 2014 / B23

Esercizio

Si consideri un punto P di massa m mobile lungo una guida rettilinea liscia verticale e sia x la coordinata di P lungo un asse parallelo alla guida ed orientato verso il basso. Sul punto, oltre al peso ed alla reazione vincolare, agiscono una forza di attrito di tipo viscoso (proporzionale alla velocità) ed una forza elastica non lineare. L'equazione del moto di P si ottiene proiettando lungo la guida l'equazione di Newton e risulta:

$$m\,\ddot{x} = m\,g - \alpha\,\dot{x} + f_{el}(x) \tag{1}$$

dove g è l'accelerazione di gravità, α il coefficiente (positivo) di attrito viscoso e

$$f_{el}(x) = -k\,(x + c\,x^3) \qquad k, c > 0$$

la forza elastica.

- Dimostrare che il sistema ha una sola configurazione di equilibrio, x_{eq}, e che x_{eq} può essere approssimato con il metodo di bisezione.
- Posto $g = 9.81$ m/s^2, $m = 1$ kg, $k = 10$ N/m, $c = 10^{-2}$ m^{-2} e $\alpha = 0.7$ Ns/m, utilizzare la procedura definita in `bisezione.sci`[1] per determinare un'approssimazione di x_{eq} con errore assoluto inferiore a 10^{-5}m.
- Posto $z = x - x_{eq}$, scrivere l'equazione del moto (1) in termini di z.
- Nell'equazione "(differenziale non lineare) scritta al punto precedente, compare l'addendo $f_{el}(x_{eq} + z)$. Sostituire tale termine con il polinomio di Taylor di ordine uno:

  $$p(z) = f_{el}(x_{eq}) + f'_{el}(x_{eq})\,z$$

  e scrivere la corrispondente equazione differenziale (lineare ed omogenea). Le soluzioni di quest'ultima approssimano i moti del punto "per piccoli scostamenti dal moto di equilibrio $x(t) = x_{eq}$."
- Si consideri l'equazione differenziale lineare ottenuta nel punto precedente. La soluzione dell'equazione che verifica le condizioni iniziali $z(0) = 0.1$ m e $\dot{z}(0) = 0$ m/s può essere approssimata, sull'intervallo di tempo $[0, 5]$ s, con il metodo di Eulero. Utilizzare la procedura definita in `LMV_TS_1_pv.sci` imponendo un errore locale massimo consentito pari a 10^{-1}. Determinare il numero di passi N_1 effettuati dalla procedura ed utilizzare il comando `plot` per ottenere i grafici della posizione (z) e della velocità ($\dot{z}$) in funzione del tempo.

[1] I files `.sci` a cui si fa riferimento si trovano sulla pagina web del corso nella sezione **altro materiale didattico**.

- Verificare che l'equazione differenziale lineare descrive il moto di un oscillatore armonico *smorzato*. Ci si aspetta quindi che le funzioni posizione e velocità siano oscillazioni di ampiezza *decrescente* nel tempo. Si constata invece che le soluzioni numeriche hanno andamento opposto (oscillazioni di ampiezza *crescente* nel tempo). Giustificare questa differenza qualitativa.

- Ripetere l'integrazione numerica imponendo un errore locale massimo consentito pari a 10^{-i} con $i = 2, \ldots, 5$. Per ciascuna delle integrazioni, determinare il numero di passi N_i che la procedura ha effettuato ed i valori massimo e minimo del passo utilizzati.

- Calcolare i rapporti N_{i+2}/N_i per $i = 1, 2$ e 3. Giustificare i risultati ottenuti ed indicare quale dovrebbe essere, approssimativamente, il numero di passi che la procedura effettua imponendo un errore locale massimo consentito pari a 10^{-9}.

Esercizio

Si consideri un punto P di massa m mobile lungo una guida rettilinea liscia verticale e sia x la coordinata di P lungo un asse parallelo alla guida ed orientato verso il basso. Sul punto, oltre al peso ed alla reazione vincolare, agiscono una forza di attrito di tipo viscoso (proporzionale alla velocità) ed una forza elastica non lineare. L'equazione del moto di P si ottiene proiettando lungo la guida l'equazione di Newton e risulta:

$$m\,\ddot{x} = m\,g - \alpha\,\dot{x} + f_{el}(x) \tag{1}$$

dove g è l'accelerazione di gravità, α il coefficiente (positivo) di attrito viscoso e

$$f_{el}(x) = -k\,(x + c\,x^3) \qquad k, c > 0$$

la forza elastica.

- Dimostrare che il sistema ha una sola configurazione di equilibrio, x_{eq}, e che x_{eq} può essere approssimato con il metodo di bisezione.
- Posto $g = 9.81$ m/s^2, $m = 1$ kg, $k = 10$ N/m, $c = 10^{-2}$ m^{-2} e $\alpha = 0.7$ Ns/m, utilizzare la procedura definita in `bisezione.sci`[1] per determinare un'approssimazione di x_{eq} con errore assoluto inferiore a 10^{-5}m.
- Posto $z = x - x_{eq}$, scrivere l'equazione del moto (1) in termini di z.
- Nell'equazione "(differenziale non lineare) scritta al punto precedente, compare l'addendo $f_{el}(x_{eq} + z)$. Sostituire tale termine con il polinomio di Taylor di ordine uno:

  $$p(z) = f_{el}(x_{eq}) + f'_{el}(x_{eq})\,z$$

  e scrivere la corrispondente equazione differenziale (lineare ed omogenea). Le soluzioni di quest'ultima approssimano i moti del punto "per piccoli scostamenti dal moto di equilibrio $x(t) = x_{eq}$."
- Si consideri l'equazione differenziale lineare ottenuta nel punto precedente. La soluzione dell'equazione che verifica le condizioni iniziali $z(0) = 0.1$ m e $\dot{z}(0) = 0$ m/s può essere approssimata, sull'intervallo di tempo $[0, 5]$ s, con il metodo di Eulero. Utilizzare la procedura definita in `eulero_pv.sci` imponendo un errore locale massimo consentito pari a 10^{-1}. Determinare il numero di passi N_1 effettuati dalla procedura ed utilizzare il comando `plot` per ottenere i grafici della posizione (z) e della velocità ($\dot{z}$) in funzione del tempo.

[1] I files `.sci` a cui si fa riferimento si trovano sulla pagina web del corso nella sezione **altro materiale didattico**.

- Verificare che l'equazione differenziale lineare descrive il moto di un oscillatore armonico *smorzato*. Ci si aspetta quindi che le funzioni posizione e velocità siano oscillazioni di ampiezza *decrescente* nel tempo. Si constata invece che le soluzioni numeriche hanno andamento opposto (oscillazioni di ampiezza *crescente* nel tempo). Giustificare questa differenza qualitativa.

- Ripetere l'integrazione numerica imponendo un errore locale massimo consentito pari a 10^{-i} con $i = 2, \ldots, 5$. Per ciascuna delle integrazioni, determinare il numero di passi N_i che la procedura ha effettuato ed i valori massimo e minimo del passo utilizzati.

- Calcolare i rapporti N_{i+2}/N_i per $i = 1, 2$ e 3. Giustificare i risultati ottenuti ed indicare quale dovrebbe essere, approssimativamente, il numero di passi che la procedura effettua imponendo un errore locale massimo consentito pari a 10^{-9}.

```
//
clear;
//
Percorso = "/home/ciampa/Lavoro/Scilab/Lavoro/LMV/";
//
// costanti
//
g = 9.81;
m = 1;
k = 10;
c = 1d-2;
alfa = 0.7;
//
// STATICA ****************************
//
function y=G(x)
    y = g - (k/m)*(x + c*x.^3)
endfunction
//
exec(Percorso + 'Zeri/bisezione.sci');
//
a = 0;
b = g/10;
tol = 1d-5;
kmax = 60;
//
[z,v,info] = bisezione(G,a,b,"assoluto",tol,kmax,"zitto");
//
printf("z = ");disp(z);
printf("v = ");disp(v);
printf("info = ");disp(info);
//
xeq = z;
B = -k*(1 + 3*c*xeq^2);
A = [  0,        1;
     B/m, -alfa/m];
//
// DINAMICA LINEARE ****************************
//
function y=d1x(t, x)
    y = A * x
endfunction
//
function y=d2x(t, x)
    y = A * d1x(t,x)
endfunction
//
exec(Percorso + 'ODE/LMV_TS_1_pv.sci');
//
x0 = [10;0];
t0 = 0;
tf = 5;
EL_MAX = 1d-4;
//
[T,U,PASSO] = LMV_TS_1_pv(x0,t0,tf,d1x,d2x,EL_MAX,"zitto");
//
rad = spec(A);
si = real(rad(1));
om = abs(imag(rad(1)));
//
function y=xe(t)
    y = [x0(1)*exp(si*t).*(-(si/om)*sin(om*t)+cos(om*t));
        -x0(1)*((si^2+om^2)/om)*exp(si*t).*sin(om*t)]
endfunction
//
et = U - xe(T);
ET(1) = 0;
for i=2:length(T),
    ET(i) = norm(et(:,i));
end;
printf("\nerrore totale massimo = %3.2e\n",max(ET));
```

```
//
// grafici
//
scf(0); clf();
//
subplot(221);
plot(T,U(1,:),"r",T,U(2,:),"b");
legend("posizione LIN","velocità LIN");
xgrid();
//
subplot(222);
plot(T(1:$-1),PASSO,"b");
xgrid();
xtitle("passo LIN");
//
//
// DINAMICA NON LINEARE ****************************
//
function y=f_el(x)
    y = -k*(x + c*x^3)
endfunction
//
function y=d1x_nl(t, x)
    y = [x(2);
         -(alfa/m)*x(2) + f_el(xeq + x(1))/m + g]
endfunction
//
function y=d2x_nl(t, x)
    z = -(alfa/m)*x(2) + f_el(xeq + x(1))/m + g
    y = [z;
         -(alfa/m)*z + (-k + 3*c*(xeq + x(1))^2)*x(2)/m]
endfunction
//
EL_MAX = 1d-6;
//
[T_nl,U_nl,PASSO_nl] = LMV_TS_1_pv(x0,t0,tf,d1x_nl,d2x_nl,EL_MAX,"zitto");
//
// grafici
//
subplot(223);
plot(T_nl,U_nl(1,:),"r",T_nl,U_nl(2,:),"b");
legend("posizione NL","velocità NL");
xgrid();
//
subplot(224);
plot(T_nl(1:$-1),PASSO_nl,"b");
xgrid();
xtitle("passo NL");
//
```