Si cons (nuovamente) il pb di Cauchy

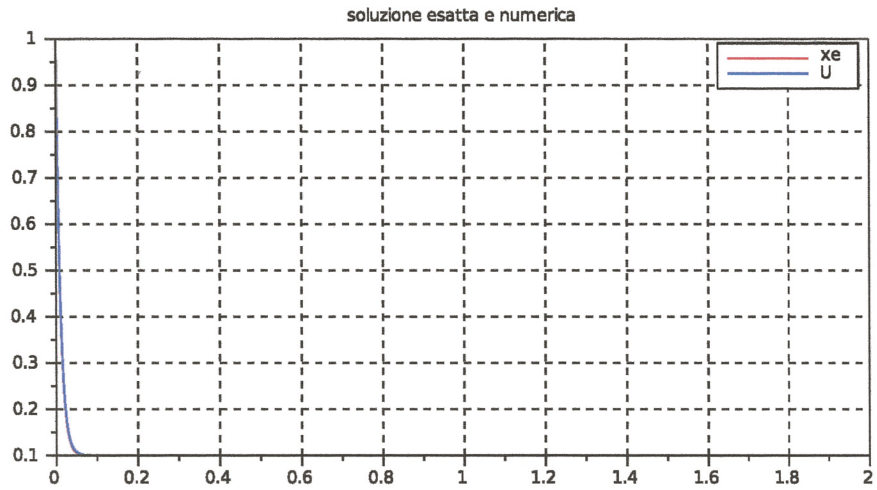
$$\begin{cases} \dot{x} = -100x + 10 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \text{su } [0,2]$$

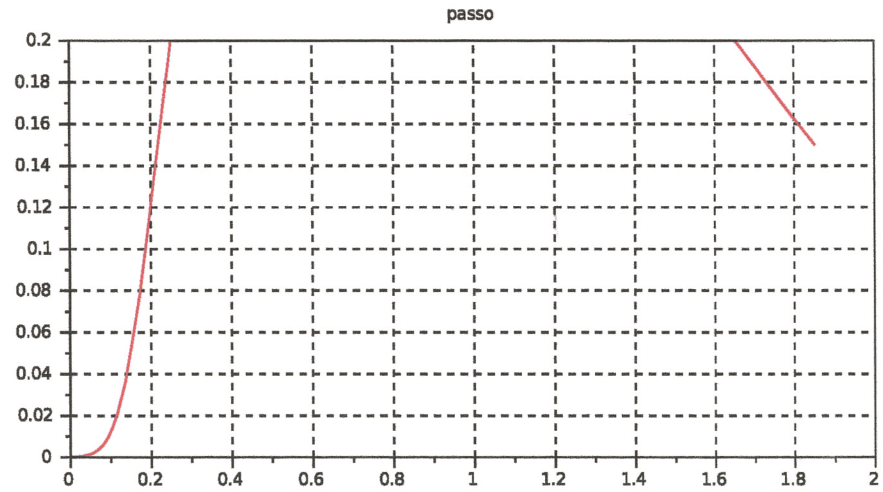
Per appross la soluz si utilizza la proc LMV_eulero_imp_pv, che realizza il metodo di EULERO IMPLICITO a passo variabile, con $EL\_MAX = 10^{-4}$.

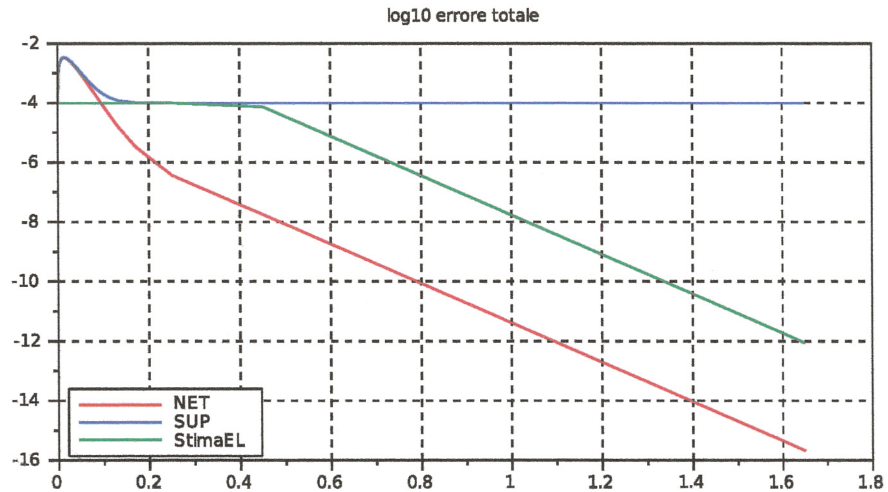
Si ottengono i grafici riportati alla pagina successiva.

Da un confronto con gli analoghi grafici ottenuti utilizzando la proc LMV_TS_1_pv, che realizza il metodo di Eulero ESPLICITO si constata che:

- sono <u>scomparse</u> le oscillazioni della soluzione numerica intorno al valore asintotico della soluz esatta $\left(\frac{1}{10}\right)$
- per $t > 0{,}3$ il passo scelto dalla procedura risulta costante e pari a 0,2 corrisp







Problema: dx/dt = -L x + 10 , L = 1.000D+02

Procedura: LMV_eulero_imp_pv

SUP(k) = EL_MAX + SUP(k-1)*exp(-L*PASSO(k-1))

EL_MAX = 1.000D-04

Errore totale massimo = 3.299D-03

Numero passi = 1.520D+02

ad una successione:

$$x_k - \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{1+100h} \right)^k \left(x_0 - \frac{1}{10} \right)$$

monotona decrescente $\left(0 < \frac{1}{1+100h} < 1 \right)$

- la stima EL ha andamento decrescente per $t > 0{,}3$ — nel tratto finale decresce in modo lineare

Oss:

(1) $h = 0{,}2$ e' il MASSIMO passo consentito dalla procedura; visto l'andamento di stima EL (nel tratto finale inferiore al valore imposto 10^{-4}) la procedura "vorrebbe" aumentare il passo oltre 0,2.

(2) La quantita' $\frac{1}{1+100h} \in (0,1)$ per OGNI $h > 0$: contrariamente a quanto accade utilizz il metodo di Eulero esplicito, la succes generata a passo costante e' SEMPRE stabile!

(3) L'errore totale massimo risulta $\sim 3 \cdot 10^{-3}$ come nel caso di Eulero esplicito.

(4) Il numero di passi è 1520, decisam inferiore ai 2260 necessari al metodo esplicito. Si oss anche che dei 1520 passi solo pochi (quanti?) sono necess per attravers la soluz da 0,3 a 2.

Le realizzaz viste di TS(1), TS(2) e Eulero implicito richiedono all'utilizzatore l'inserimento (fct2 nei casi TS(1) e Eulero implicito, fct 3 nel caso TS(2)) di una funzione utilizzata SOLAMENTE per la scelta del passo (dunque non necessaria per il calcolo di x_{k+1}). Questo può essere evitato con realizzazioni meno "ingenue" dei vari metodi.

Ad esempio, per un metodo di ORDINE 2 (ovvero in cui $el_{k+1} = C_k h_k^3 + O(h_k^4)$), si può procedere come segue:

- $k = 0$
- scegli h_*
- finchè $t_k < t_f$ ripeti

1) calcola EL_*, stima di EL utilizzando h_* (dell' errore locale che la proc commetterebbe se utilizzasse passo h_*)

2) calcola $h_k = \left(\frac{E}{EL_*} \right)^{\frac{1}{3}} h_*$

(con questo passo la procedura commette un err locale pari ad E)

3) calcola x_{k+1} utilizz h_k e
$t_{k+1} = t_k + h_k$

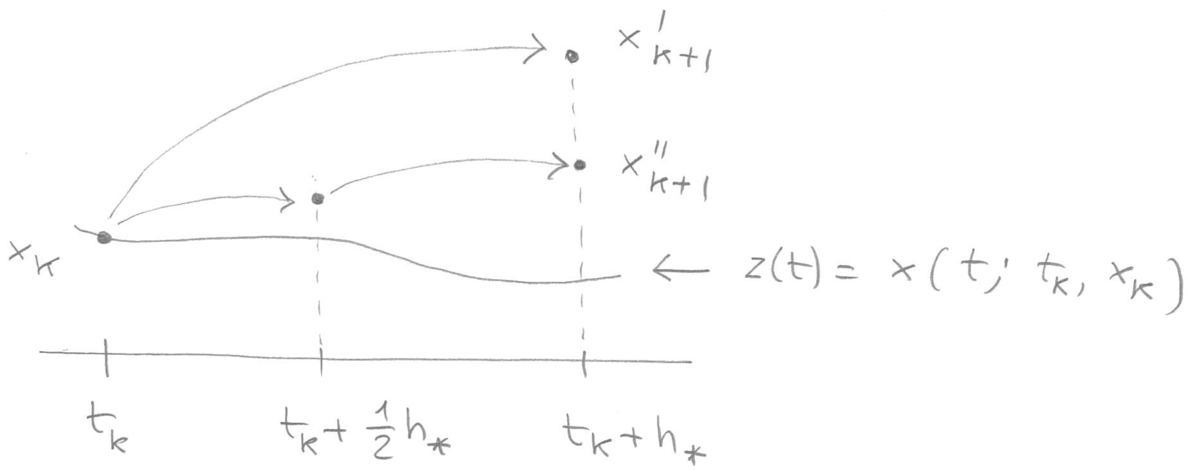
4) $h_* = h_k$

5) $k \leftarrow k+1$

Oss: (1) Come calcolare EL_*:

(a) calcolare x'_{k+1} usando h_* e x_k; si ottiene:

$$x'_{k+1} - z(t_{k+1}) = c_k h_*^3 + O(h_*^4)$$



(b) calcolare x''_{k+1} con DUE passi del metodo numerico, ciascuno con passo $\frac{1}{2}h_*$;

si ottiene:

$$x''_{k+1} - z(t_{k+1}) \simeq 2\, C_k \left(\tfrac{1}{2}h_*\right)^3 + O(h_*^4)$$

(c) Infine:

$$x'_{k+1} - x''_{k+1} = \left[x'_{k+1} - z(t_{k+1})\right] -$$

$$- \left[x''_{k+1} - z(t_{k+1})\right] =$$

$$= \underbrace{C_k\left(h_*^3 - \frac{h_*^3}{4}\right)}_{= \frac{3}{4} C_k h_*^3} + O(h_*^4)$$

(d) si ottiene la STIMA dell' err locale commesso con passo h_*:

$$\boxed{EL_* = C_k h_*^3 \simeq \frac{4}{3}\left(x'_{k+1} - x''_{k+1}\right)}$$

(2) <u>Come scegliere</u> h_k :

(a) $EL_* \simeq C_k h_*^3 \Rightarrow C_k \simeq \frac{EL_*}{h_*^3}$

(b) imponendo $C_k h_k^3 = E$

si ottiene $h_k = \left(\frac{E}{C_k}\right)^{\frac{1}{3}}$

(c) dunque:

$$\boxed{h_k = \left(\frac{E\, h_*^3}{EL_*}\right)^{\frac{1}{3}} = h_* \left(\frac{E}{EL_*}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

si noti che: <u>SE</u> $EL_* > E$ (err locale con passo h_* troppo grande) <u>ALLORA</u> $h_k < h_*$ (si diminuisce il passo);

<u>SE</u> $EL_* < E$ (err locale con passo h_* troppo piccolo) ALLORA $h_k > h_*$ (si aumenta il passo).