Sia: $\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ il pb di Cauchy in esame, con

- $F(t,x)$ suff regolare da garantire che la soluz

$$z(t) = x(t; t_0, x_0) \in C^2$$

* Metodo di EULERO ESPLICITO * (caso eq. singola)

- (Taylor): $\forall \tau, h \; \exists \theta$ t.c.

$$z(\tau+h) = z(\tau) + z'(\tau)h + \frac{1}{2} z''(\theta) h^2$$

con θ tra τ e $\tau+h$

- $\tau = t_0$: $\quad z(t_0+h) = z(t_0) + z'(t_0)h + \frac{1}{2} z''(\theta_0) h^2$

<u>MA</u>: $\quad z(t_0) = x_0, \quad z'(t_0) = F(t_0, x_0)$

(perché z è la soluz del Pb di Cauchy ...)

- EULERO: $\quad x_1 = x_0 + F(t_0, x_0) h$

$\Rightarrow$ errore (LOCALE) con passo h:

$$x_1 - z(t_0+h) = -\frac{1}{2} z''(\theta_0) h^2$$

- scelgo h_0 t.c. $|el_1| = EL_1 = E$

valore > 0 scelto dall'utilizz.

<u>MA</u> $z''(\theta_0)$ non è noto. Allora:

$$\boxed{\text{Ip: } z''(t_0) \text{ è una BUONA STIMA di } z''(\theta_0).}$$

$\Rightarrow$ el_1 con passo $h \simeq -\frac{1}{2} z''(t_0) h^2$

<u>Oss</u>: $z''(t_0)$ è noto! Siccome $z(t)$ è soluzione...

$$\dots \quad z''(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, z(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, z(t))\, F(t, z(t))$$

$\Rightarrow$ $z''(t_0) = \dots$

Q.di: scelgo h_0 t.c.

$$EL_1 \simeq \boxed{\frac{1}{2} |z''(t_0)| h_0^2 = E}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_0 = \sqrt{\frac{2E}{|z''(t_0)|}}} \qquad (\underline{se}\ z''(t_0) \neq 0 \dots)$$

- <u>ADESSO</u>: $x_1 = x_0 + F(t_0, x_0) h_0$

  $t_1 = t_0 + h_0$

- all'iteraz successiva:

$\tau = t_1$, $\quad z(t_1+h) = z(t_1) + z'(t_1)\,h + \frac{1}{2} z''(\theta_1)\,h^2$

MA : $\quad z(t_1) = x(t_1;\, t_1, x_1) = x_1$

$z'(t_1) = F(t_1, x_1)$ perché z è, adesso, la soluz del Pb di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

- EULERO : $\quad x_2 = x_1 + F(t_1, x_1)\,h$

$\Rightarrow$ errore (LOCALE) con passo h :

$$x_2 - z(t_1+h) = -\frac{1}{2} z''(\theta_1)\,h^2$$

- scelgo h_1 t.c. $\quad |el_2| = EL_2 = E$

ecc ...

$$h_1 = \sqrt{\frac{2E}{|z''(t_1)|}} \qquad (\text{se } z''(t_1) \neq 0 \ldots)$$

- ADESSO : $\quad x_2 = x_1 + F(t_1, x_1)\,h_1$

$t_2 = t_1 + h_1$

- In generale : $\quad h_k = \sqrt{\frac{2E}{|z''(t_k)|}} \qquad (\text{se } z''(t_k) \neq 0 \ldots)$

poi : $\quad x_{k+1} = x_k + F(t_k, x_k)\,h_k$

$t_{k+1} = t_k + h_k$

PROBLEMI

1. Dopo quanti passi si raggiunge t_f ?
2. Raggiunto t_f, quanto sono buone le appross $x_k \simeq x(t_k; t_0, x_0)$?

---

1. • in generale non si ha garanzia che t_f verrà raggiunto...

• sotto ip minime per l'$\exists!$ della soluz del pb di Cauchy (lipschitzianità di F...) si ha:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall\ \tau, \xi \quad \exists M > 0 \ \text{t.c.} \\ \text{posto} \quad z(t) = x(t; \tau, \xi) \\ \text{si ha:} \quad |z''(\tau)| \leq M \end{array}}$$

• Allora:

$$h_k = \sqrt{\frac{2E}{|z''(t_k)|}} \geq \sqrt{\frac{2E}{M}} = h_{min}$$

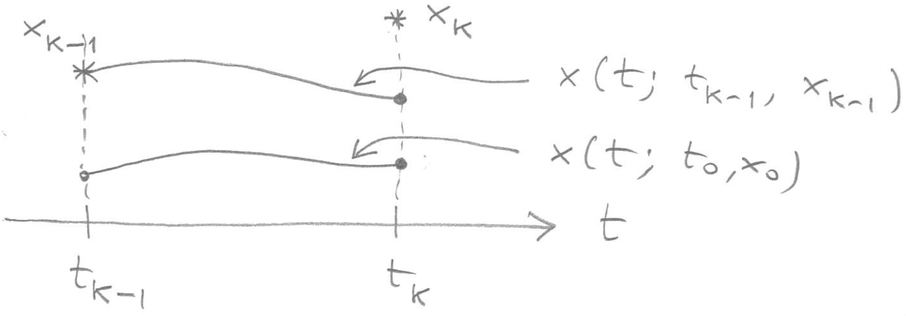
• Ne segue che il NUMERO N di passi per raggiungere t_f è FINITO e:

$$\boxed{N \leq \frac{t_f - t_0}{h_{min}} = (t_f - t_0)\sqrt{\frac{M}{2E}}}$$

• **Oss:** $\lim_{E \to 0} (t_f - t_0) \sqrt{\dfrac{M}{2E}} = +\infty$.

---

(2) Per l' errore totale si ha:



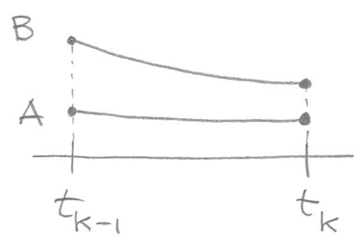
$$et_k = el_k + \varphi(et_{k-1}) \qquad \begin{aligned} &= x(t_k;\, t_{k-1}, x_{k-1}) - \\ &\quad - x(t_k;\, t_0, x_0) \end{aligned}$$

"et_{k-1} trasportato dall' eq diff all' ist t_k"

$$\Rightarrow \boxed{ET_k \leq EL_k + \| \varphi(et_{k-1}) \|}$$

• Studio di $\varphi(et_{k-1})$:

<u>Es. 1</u> $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ x(t_{k-1}) = \alpha \end{cases} \Rightarrow x(t;\, t_{k-1}, \alpha) = \alpha\, e^{-(t - t_{k-1})}$



$$|x(t_k;\, t_{k-1}, A) - x(t_k;\, t_{k-1}, B)|$$
$$= |A - B|\, e^{-h_{k-1}}$$

• $\Rightarrow |\varphi(et_{k-1})| = ET_{k-1}\, e^{-h_{k-1}}$

(<u>Oss</u>: in questo caso $|\varphi(et_{k-1})| < ET_{k-1}$)

Es. 2 $\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(t_{k-1}) = \alpha \end{cases} \Rightarrow x(t; t_{k-1}, \alpha) =$

$$= \alpha\, e^{(t - t_{k-1})}$$

$$\Rightarrow \quad |\varphi(et_{k-1})| = ET_{k-1}\, e^{h_{k-1}}$$

(Oss: in questo caso $|\varphi(et_{k-1})| > ET_{k-1}$)

- In generale (sotto ip minime ...):

$\exists L > 0$ (dip dal Pb di Cauchy)

t.c.
$$\|\varphi(et_{k-1})\| \leq ET_{k-1}\, e^{L h_{k-1}}$$

- Allora:

$$ET_0 = 0$$

$$ET_1 = EL_1 \simeq E$$

$$ET_2 \leq EL_2 + \|\varphi(et_1)\|$$

$$\leq EL_2 + ET_1\, e^{L h_1} \simeq E\left(1 + e^{L h_1}\right)$$

$$ET_3 \leq EL_3 + \|\varphi(et_2)\|$$

$$\leq EL_3 + ET_2\, e^{L h_2} \leq$$

$$\leq EL_3 + EL_2\, e^{L h_2} + ET_1\, e^{L(h_1 + h_2)}$$

$$\simeq E\left(1 + e^{L h_2} + e^{L(h_1 + h_2)}\right)$$

$$\vdots$$

$$ET_k \leq E\left[1 + e^{Lh_{k-1}} + e^{L(h_{k-1}+h_{k-2})} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + e^{L(h_{k-1}+\dots+h_1)}\right]$$

- MA : $h_{k-1} + \dots + h_1 < t_f - t_0$

$$\Rightarrow e^{L(h_{k-1}+\dots+h_1)} < e^{L(t_f - t_0)}$$

e analogam per tutti gli addendi ...

$$\Rightarrow \boxed{ET_k \leq E\,k\, e^{L(t_f - t_0)}}$$

- Infine, $\forall k = 0, \dots, N$:

$$ET_k \leq E\,N\, e^{L(t_f - t_0)}$$

e, siccome $N \leq (t_f - t_0)\sqrt{\dfrac{M}{2E}}$:

$$\boxed{\forall k, \quad ET_k \leq \sqrt{E}\,\underbrace{\left[(t_f - t_0)\sqrt{\frac{M}{2}}\, e^{L(t_f - t_0)}\right]}_{\text{quantità indip da } E}}$$

Oss: $\lim_{E \to 0} \sqrt{E}\,[\ \dots\ ] = 0$

$$\boxed{\text{quindi: per ottenere approx } x_0, \dots, x_N \text{ con err totale piccolo quanto si vuole basta scegliere } E \text{ suff piccolo!}}$$

(... e avere suff pazienza: più piccolo è E più elevato dobbiamo aspettarci che sia N!)