CN # 44,45 / 12 maggio 2014 / C43

• TEO: sia A a colonne LINEARMENTE INDIPENDENTI.
Allora: LA soluz di $Ax=b$ nel senso dei mq è
LA soluz del sistema delle eq.ni normali

$$\boxed{A^T A x = A^T b}$$

dim: sia $\hat{x}$ t.c. $A^TA\hat{x} = A^Tb$. Allora:

$\forall x \in \mathbb{R}^k$, $\|Ax-b\|^2 = \|Ax - A\hat{x} + A\hat{x} - b\|$

$= \|A(x-\hat{x}) + A\hat{x} - b\|^2 = \dots$

sono $\perp$: $(A\hat{x}-b) \cdot A(x-\hat{x}) = (x-\hat{x})^T A^T (A\hat{x}-b)$

$= (x-\hat{x})^T (A^TA\hat{x} - A^Tb) = 0$

$\dots = \|A(x-\hat{x})\|^2 + \|A\hat{x}-b\|^2$

- SE $x = \hat{x}$ allora $A(x-\hat{x}) = 0 \Rightarrow \|A(x-\hat{x})\|^2 = 0$

  SE $x \neq \hat{x}$ allora $\underbrace{A(x-\hat{x}) \neq 0}$ $\Rightarrow \|A(x-\hat{x})\|^2 > 0$

  perché le colonne di A sono lin indip!

SE $x = \hat{x}$ allora $\|Ax-b\|^2 = \|A\hat{x}-b\|^2$

SE $x \neq \hat{x}$ allora $\|Ax-b\|^2 > \|A\hat{x}-b\|^2$

- Nelle ip del Teo, la matr $\underline{A^TA \text{ è invertibile}}$, quindi:

$$\boxed{\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb}$$

A^TA è <u>SIMM DEF POS</u> e quindi invertibile...

- $\forall x \in \mathbb{R}^k$: $(A^T A x) \cdot x = (x^T A^T) A x = Ax \cdot Ax$

  $= \| Ax \|^2 \geq 0$ ($A^T A$ SEMIDEF pos)

  inoltre: $\| Ax \| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  def di norma — colonne di A lin indip

<u>def</u> (fatt QR, caso rettangolare):

$A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ a colonne lin indip;

U, T fatt QR di A se

- $U \in \mathbb{R}^{n \times k}$ a colonne ortonormali ($U^T U = I$)
- $T \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tr sup
- $UT = A$

- $A = UT \Rightarrow A^T A = T^T U^T U T = T^T T$

  $A^T b = T^T U^T b$

  q.di $A^T A x = A^T b \sim T^T T x = T^T U^T b$

  <u>MA</u> T invert (infatti...) $\Rightarrow T^T$ invert

  q.di: $\boxed{A^T A x = A^T b \sim T x = U^T b}$

  caso semplice!

CN #41, 42 / 9 maggio 2013 / A11

* EQUAZIONI DIFFERENZIALI (ordinarie) *

- Forma normale (Pb di Cauchy)

<u>Es</u>: (oscillatore armonico)

Eq. Newton (lungo asse x): $m\ddot{x} = -kx$

$\sim \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ EQ del SECONDO ordine (cond iniz: $x(0)$, $\dot{x}(0)$ ...)

Forma normale: SISTEMA di DUE eq del PRIMO ord:

$x_1 = x \,,\; x_2 = \dot{x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 \end{cases}$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Pb di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \\ \underbrace{x(t_0) = x_0}_{\text{CONDIZIONI INIZIALI}} \end{cases}$, $t \in [t_0, t_f]$

- $\boxed{\text{SOLUZIONE}}$: $x: [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$, derivabile, che $\forall t \in [t_0, t_f]$ verifica l'eq (E) $x(t_0) = x_0$

<u>NOTAZIONE</u>: $x(t; x_0, t_0)$

- Ip: $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists!$ soluzione del Pb ...

- un METODO NUMERICO per l'APPROSSIMAZIONE della soluz del Pb di Cauchy ...

... costruisca valori $\boxed{x_0, x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n}$

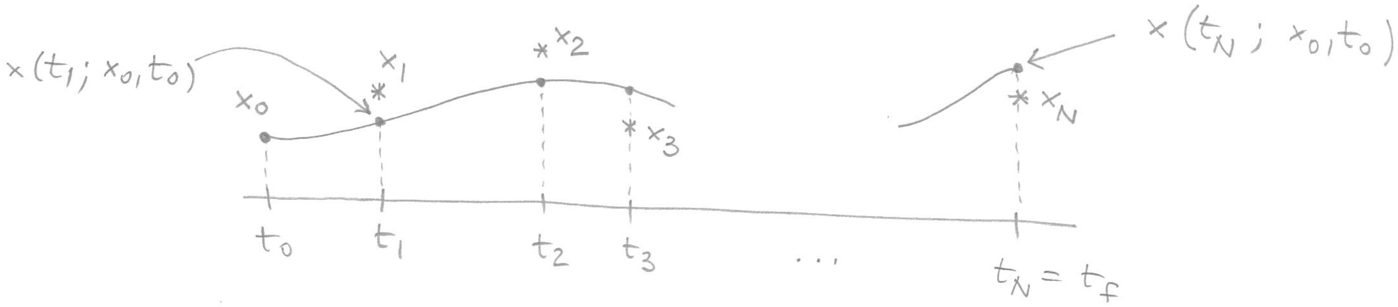
da utilizz come approssimazioni di

$$x(t_0; x_0, t_0),\ x(t_1; x_0, t_0), \dots,\ x(t_f; x_0, t_0)$$

<u>OVVERO</u> come approssimaz dei valori della soluz $x(t; x_0, t_0)$ agli istanti

$$\boxed{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N = t_f}$$

Il numero $\boxed{h_k = t_{k+1} - t_k}$ si chiama <u>PASSO</u> di INTEGRAZIONE all'istante t_k.



<u>PROCEDURA</u>:

<u>dati</u>: x_0, t_0, t_f, F

<u>uscita</u>: $x_0, \dots, x_N$; $t_0, \dots, t_N$

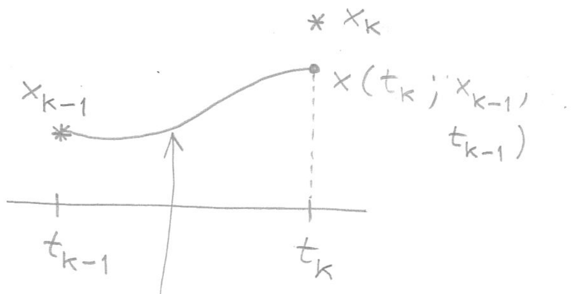
- $k = 0$;
- <u>finché</u> $t_k < t_f$ <u>ripeti</u>:
  - SCEGLI h_k

- CALCOLA x_{k+1}
- $t_{k+1} = t_k + h_k$
- $k = k+1$

<u>Oss</u> : la procedura SCEGLIE h_k per "controllare l'errore" come RICHIESTO dall'UTILIZZATORE. Tra i <u>dati</u> della procedura compare (in modo esplicito o no) un "errore massimo consentito";

la procedura CALCOLA x_{k+1} utilizz le info note all'ist t_k, in particolare $x_0, x_1, \dots, x_k$.

<u>def</u> (ERRORE LOCALE)



sol del Pb di C:

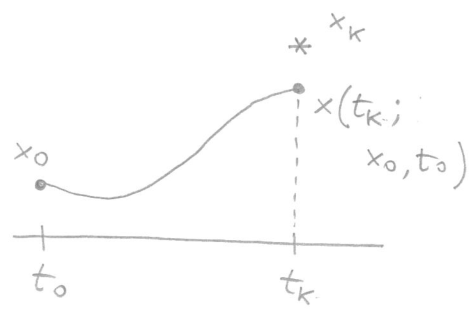
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_{k-1}) = x_{k-1} \end{cases}$$

$$el_k = x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1})$$

misura di quanto "sbaglia" la procedura nel "seguire" la soluz esatta che passa per $(t_{k-1}; x_{k-1})$

$$EL_k = \| el_k \| = \| x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) \|$$

<u>def</u> (ERRORE TOTALE)

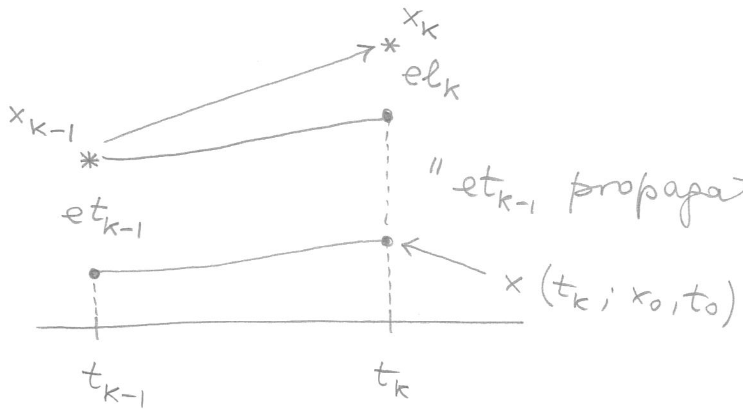


$$et_k = x_k - x(t_k; x_0, t_0)$$

$$ET_k = \| et_k \|$$

Oss: (1)

$$
\begin{aligned}
ET_k &= \| x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) + \\
&\quad + x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) - x(t_k; x_0, t_0) \| \\
&\leq EL_k + \underbrace{\| x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) - x(t_k; x_0, t_0) \|}_{\text{"}et_{k-1}\text{ propagato all'ist }t_k\text{"}}
\end{aligned}
$$



(2) la procedura "controlla" l'ERRORE LOCALE, quindi quello totale solo indirettamente!

$$\boxed{\text{L'intento della procedura al passo } k \text{ è quello di rendere } x_{k+1} \text{ una buona ap-prox di } x(t_{k+1}; x_k, t_k).}$$