* Criteri di arresto *

- $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile , $b \neq 0$.

(1) SE $\| r_k \| \leq E \| b \|$ ALLORA STOP

con $r_k = A x_k - b$ ...

- "calcolabile" e "certam verif dopo un numero FINITO di iterazioni"
- se verificato, allora : $\boxed{\dfrac{\| x_k - x^* \|}{\| x^* \|} \leq c(A) \dfrac{\| r_k \|}{\| b \|}}$

SE $c(A)$ grande (sistema mal condiz)

ALLORA: $\dfrac{\| r_k \|}{\| b \|}$ piccolo $\not\Rightarrow$ err rel piccolo.

(2) se $\| x_k - x_{k-1} \| < E$ allora STOP

- "calcolabile" e "certam verif ... " (perché ?)
- se verif allora :

$$\boxed{\text{SE } \| H \| < 1 \text{ ALLORA } \quad \| x_k - x^* \| \leq \frac{\| H \|}{1 - \| H \|} \| x_k - x_{k-1} \|}$$

SE $\| H \| \simeq 1$ ALLORA: $\| x_k - x_{k-1} \|$ piccolo $\not\Rightarrow$ err assoluto piccolo

* Soluz di un sist NEL SENSO dei M.Q. *

def: $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $b \in \mathbb{R}^n$

$x^* \in \mathbb{R}^k$ soluz di $Ax = b$ nel senso dei mq

se

$$\forall x \in \mathbb{R}^k, \quad \| Ax - b \|^2 \geq \| Ax^* - b \|$$

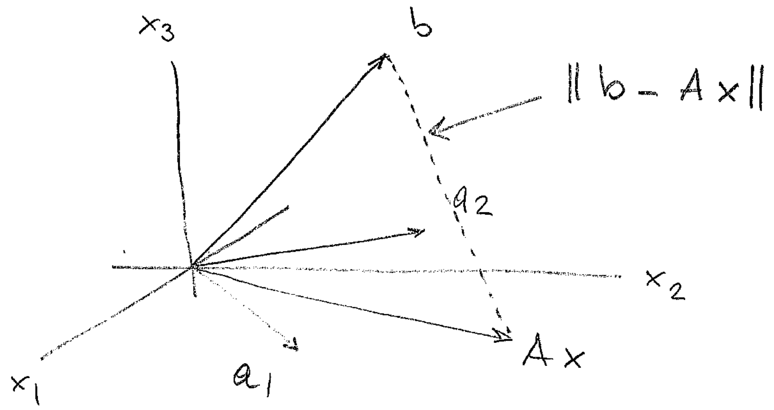
Oss: x^* è uno degli elem che rende minimo il valore della funzione

$$F(x) = \| Ax - b \|^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

- $x \in \mathbb{R}^2$; $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x_2$

- tra tutte le $x \in \mathbb{R}^2$ si cercano quelle che rendono minima la norma del vettore $Ax - b$ ~ tra tutte le comb lin delle colonne di A si cercano quelle (i coeff di quelle) che rendono minima la norma del vettore $Ax - b$ ...



- la norma $\|b - Ax\|$ è minima (ovvero $\|Ax - b\|^2$ è minima)

quando Ax è la pr ortogonale di b sul piano delle colonne di A

- $\forall b$, $\exists!$ pr ort di b sullo spazio gen dalle colonne di A MA:

1) **SE** colonne di A lin indip : $\exists!$ comb lin che vale la pr ort, ovvero: $\exists!$ soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei mq

2) **SE** colonne di A lin dip : $\exists$ infinite comb lin che valgono la pr ort, ovvero: $\exists$ infinite soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei mq.