* METODI ITERATIVI PER SISTEMI LINEARI *

dati: $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$

- $x_0 = \gamma$
- per $k = 1, 2, \ldots$ ripeti: $x_k = H x_{k-1} + c$

uscita: quando un opportuno criterio di arresto è verificato, x_k.

Oss: E' il m it ad un pto def della funzione $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ t.c. $h(x) = Hx + c$. Questa f è CONTINUA e q.di: SE la succes generata dal m. it è convergente a $v \in \mathbb{R}^n$, v è PUNTO UNITO di h, ovvero: $v = Hv + c$.

Il m it def da H e c approssima le soluzioni del sistema: $(I-H)x = c$

- Se si vuole appross la soluz del sistema $Ax = b$, occorre che i sist $Ax = b$ e $(I-H)x = c$ siano EQUIVALENTI. In part: $\det(I-H) \neq 0$.

- Per approssim la soluz, occorre trovare success CONVERGENTI ovvero, note H e c, valori iniziali γ che garantiscono la convergenza.

<u>Es.</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = 0 \ ;$$

$$H = I - A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad c = b$$

I sistemi $Ax = b$ e $(I-H)x = c$ sono <u>equiv</u>!

- Scelto $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, si ha:

$$x_0 = \gamma, \quad x_1 = Hx_0 + c = H\gamma, \quad x_2 = Hx_1 + c = H^2\gamma$$

$$\ldots \quad x_k = H^k \gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1/2^k \\ 2^k \gamma_2 \end{bmatrix}$$

- $\boxed{\text{la success } x_k \text{ è convergente } \Leftrightarrow \gamma_2 = 0}$

e, in tal caso, il lim è la soluz...

→ la success converge SOLO per γ particolari!

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = 0$

- $A = 2I + \underbrace{J}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$, $(2I + J)x = b \sim 2x = -Jx + b$

  $\sim x = -\frac{1}{2}Jx + \frac{1}{2}b \Rightarrow \boxed{H = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix},\ c = \frac{1}{2}b}$

- H è diagonalizz.: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

- Scelto $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, è

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \gamma$$

e $\boxed{\forall \gamma_1, \gamma_2 \text{ si ha } \lim_{k \to \infty} x_k = 0.}$

ovvero: la success. converge per OGNI γ!

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{def}}\ \text{(Metodo convergente): Il } \underline{\text{m it}} \text{ def da} \\ H \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } c \in \mathbb{R}^n \text{ è CONVERGENTE se} \\ \forall \gamma \in \mathbb{R}^n \text{ la success } x_k \text{ generata dal m} \\ \text{è convergente (E) } \lim_{k \to \infty} x_k \text{ è indip da } \gamma\end{array}}$

<u>oss</u>: confrontare con il caso NON LINEARE: in tal caso la situazione buona usuale è quella di CONVERGENZA LOCALE...

$\boxed{\text{TEO: Il m. it def da } H \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } c \in \mathbb{R}^n \text{ è convergente} \iff \rho(H) < 1.}$

RAGGIO SPETTRALE di H

$= \max \{ |\lambda|, \lambda \in \sigma(H) \}$

SPETTRO di H

$= \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \det(H - \lambda I) = 0 \}$