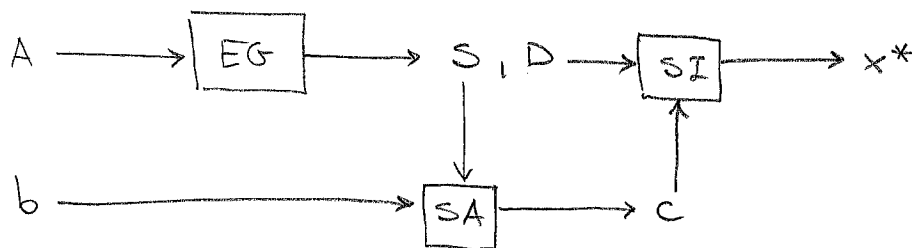


* METODI DIRETTI in $F(\beta, m)$ *

es: $A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma \in (0, 1)$, $b \in \mathbb{R}^2$

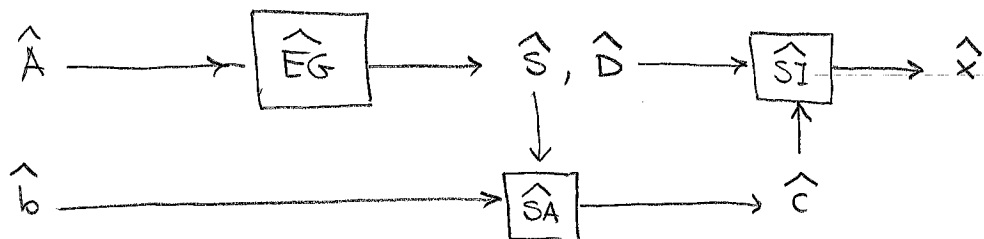
• $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$; $\|A\| < \sqrt{3}$, $\|A^{-1}\| < \sqrt{3} \Rightarrow c(A) < 3$

• operando in \mathbb{R} :



$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\gamma & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & -1/\gamma \end{bmatrix}$

• operando in $F(\beta, m)$:



• supponiamo che: $\hat{A} = A$, $\hat{b} = b$ (i dati sono in $F(\beta, m)$),

$\hat{EG}(A) = S, D$ (la fatt LR è esatta), $\hat{SA}(S, b) \neq c$

con: $\|\hat{c} - c\| < u \|c\|$, $\hat{SI}(D, \hat{c}) = SI(D, \hat{c}) \dots$

... NONOSTANTE tutto questo, l'errore $\frac{\|\hat{x} - x^*\|}{\|x^*\|}$

può essere GRANDE:

$$\|D\| = \max \sqrt{(\gamma c + s)^2 + \left(\frac{s}{\gamma}\right)^2} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} \quad (c=0, s=1)$$

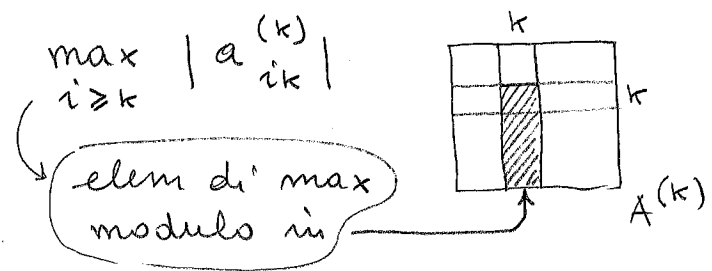
$$\min \sqrt{(\gamma c + s)^2 + \left(\frac{s}{\gamma}\right)^2} \leq \sqrt{\gamma^2} \quad (c=1, s=0)$$

$$\Rightarrow \kappa(D) = \|D\| \|D^{-1}\| \geq \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} +\infty$$

L'unico errore imputabile al computer ($\hat{c} \neq c$) è molto piccolo (\approx precis di macchina) MA l'errore sulla soluzione può essere (in effetti è, per qualche b) molto grande poiché $\kappa(D) \gg 1$.

• Rimedio: EGPP

Pivoting Parziale: si usa come pivot al posto k l'elemento



Es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{32}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{H_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = P_{32} P_{12}$$

DM: (1) lo scambio di righe si effettua non solo se il candidato pivot è zero

$$(2) \forall i, j: |s_{ij}| \leq 1$$

(3) $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile:

$$c(D) \leq F(n) c(A)$$

di p solo dalla diu della matrice

in particolare NON si può avere crescita illimitata del n. di cond nel passaggio da A a D.

• uso delle fatt QR in $F(\beta, m)$:

$$(1) A = UT \Rightarrow \|A\| = \|UT\| = \max_{\|v\|=1} \|U(Tv)\|$$
$$= \max_{\|v\|=1} \|Tv\|$$
$$= \|T\|$$

ortogonale $\Rightarrow \forall w, \|Uw\| = \|w\|$

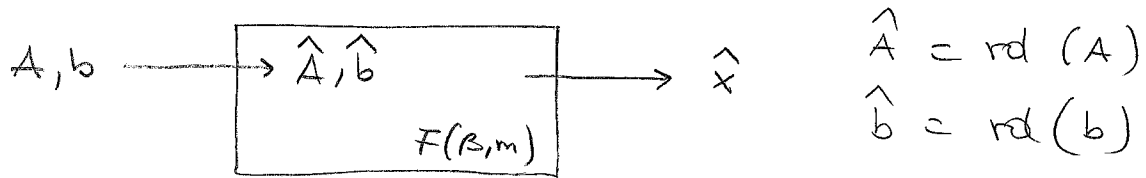
$$(2) T^{-1} = A^{-1}U \Rightarrow \|T^{-1}\| = \|A^{-1}U\| = \max_{\|w\|=1} \|A^{-1}(Uw)\|$$
$$= \max_{\|Uw\|=1} \|A^{-1}(Uw)\| = \|A^{-1}\|$$

$\Phi. d$:

$$c(T) = \|T\| \|T^{-1}\| = c(A)$$

In pratica:

① siano $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ i dati del Pb.



Nel caso migliore: \hat{x} è t.c. $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$, ovvero è la sol esatta del sist con i dati perturbati.

Si ha: $\hat{A} = A + E$, $\hat{b} = b + f$ con

$$\|E\| \leq \mu \|A\|, \quad \|f\| \leq \mu \|b\|$$

dunque:

$$\hat{x} \text{ t.c. } (A+E)\hat{x} = b+f \text{ con}$$

Teo condi'z \Rightarrow SE ... ALLORA $\frac{\|\hat{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \leq 2\mu c(A)$

Quando $c(A)$ molto grande ($\mu c(A) \approx 0,1$),
sistemi difficile da studiare!

② Utilizz EGPP o qr:

$$\hat{x} \text{ t.c. } (A+E)\hat{x} = b \text{ con } \|E\| \leq F(m) \mu \|A\|$$

- $F(m) \approx m$ quasi sempre con EGPP, ma per qualche A si ha $F(m) \approx 2^m$;

- $F(n) \approx n$ utilità QR calcolata opportunamente (NON con GS!): l'istruzione gr di Sailab va bene.

Ancora: Teo condiz ...

```

0001 //
0002 // Esempio con matrice di Vandermonde. La matrice ha un numero di
0003 // condizionamento rapidamente crescente con la dimensione del sistema.
0004 //
0005 // Il sistema è risolto in due diversi modi: utilizzando EGPP ed utilizzando
0006 // qr.
0007 //
0008 // Osservazione: la misura relativa dei residui N_RES (paragonabile nei due casi)
0009 // indica che il sistema è stato risolto "bene" dal calcolatore. L'errore
0010 // relativo, rapidamente crescente con la dimensione, è dovuto al pessimo
0011 // condizionamento del sistema.
0012 //
0013 clear;
0014 //
0015 Percorso = "PERCORSO files seguenti"; // <----- *** MODIFICARE ***
0016 exec(Percorso + "EGPP.sci");
0017 exec(Percorso + "SA.sci");
0018 exec(Percorso + "SI.sci");
0019 //
0020 // variabili utili
0021 //
0022 DIM = [];
0023 COND_A = [];
0024 ERR_EG = [];
0025 N_RES_EG = [];
0026 ERR_QR = [];
0027 N_RES_QR = [];
0028 SUP_EG = [];
0029 SUP_QR = [];
0030 //
0031 // ciclo sulla dimensione del sistema
0032 //
0033 for N = 5:2:25,
0034 DIM($+1) = N;
0035 //
0036 // generazione della matrice
0037 //
0038 colonna = linspace(0,1,N)';
0039 A = zeros(N,N);
0040 for k=1:N,
0041     A(:,k) = colonna.^(k-1);
0042 end;
0043 //
0044 // soluzione esatta e termine noto corrispondente
0045 //
0046 x_esatta = ones(N,1)/sqrt(2);
0047 b = A*x_esatta;
0048 //
0049 // numero di condizionamento della matrice
0050 //
0051 COND_A($+1) = cond(A);
0052 //
0053 // soluzione del sistema con EGPP, SA e SI
0054 //
0055 [S,D,P,info_EGPP] = EGPP(A);
0056 [c_EG,info_SA] = SA(S,P*b,"disabilita");
0057 [x_EG,info_SI] = SI(D,c_EG,"disabilita");
0058 //
0059 // soluzione con qr, moltiplicazione e SI
0060 //
0061 [U,T] = qr(A);
0062 c_QR = U' * b;
0063 [x_QR,info_SI] = SI(T,c_QR,"disabilita");
0064 //
0065 // misura relativa degli errori
0066 //
0067 ERR_EG($+1) = norm(x_EG - x_esatta)/norm(x_esatta);
0068 ERR_QR($+1) = norm(x_QR - x_esatta)/norm(x_esatta);
0069 //
0070 // misura relativa dei residui

```

```

0071 //
0072 N_RES_EG($+1) = norm(A*x_EG - b)/norm(b);
0073 N_RES_QR($+1) = norm(A*x_QR - b)/norm(b);
0074 //
0075 // uso del Teorema di condizionamento
0076 //
0077 SUP_EG($+1) = COND_A($)*N_RES_EG($);
0078 SUP_QR($+1) = COND_A($)*N_RES_QR($);
0079 end;
0080 //
0081 // grafici
0082 //
0083 scf(0);clf(0);
0084 plot(DIM,log10(COND_A),"gs",...
0085      DIM,log10(SUP_EG),"rs",DIM,log10(ERR_EG),"r+",DIM,log10(N_RES_EG),"rx",...
0086      DIM,log10(SUP_QR),"bo",DIM,log10(ERR_QR),"b+",DIM,log10(N_RES_QR),"bx");
0087 xlabel("dimensione");
0088 ylabel("logaritmo in base 10 di...");
0089 legend("COND_A","SUP_EG","ERR_EG","N_RES_EG","SUP_QR","ERR_QR","N_RES_QR",2);
0090 title("confronto EGPP , qr");

```