

Teo (di condizionamento)

Siano A, b dati del sistema da risolvere,
 E, F perturbazioni dei dati, x_*, \hat{x} e α t.c.:

- | | | |
|---|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile • $b \in \mathbb{R}^n$ non zero • $Ax_* = b$ ($x_* \neq 0$) | | <ul style="list-style-type: none"> • $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c. $A+E$ invert • $f \in \mathbb{R}^n$ • $(A+E)\hat{x} = b+f$ |
|---|--|---|

- $\|E\| \leq \alpha \|A\|$, $\|f\| \leq \alpha \|b\|$ (ovvero: α è un limite superiore per la misura delle perturbaz)

- $\alpha c(A) < \frac{1}{10}$

Allora: (1) $\frac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq 2\alpha c(A)$

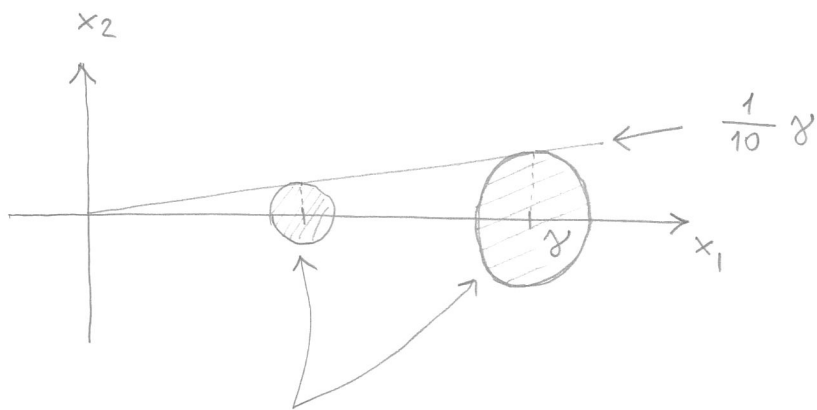
(2) \exists dato b , perturbaz E, f t.c.

$$\frac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} = 2\alpha c(A)$$

- Oss (su errore relativo):

Siano x_* , \hat{x} t.c. $\frac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq \frac{1}{10}$

e $\|x_*\| = \gamma > 0$. In \mathbb{R}^2 (ad es $x_* = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$):



insiemi di tutti gli \hat{x}
che hanno err rel $\leq \frac{1}{10}$ da x_*

Es: disegno analogo per errore ASSOLUTO
 $\|\hat{x} - x_*\| \leq \frac{1}{10}$.

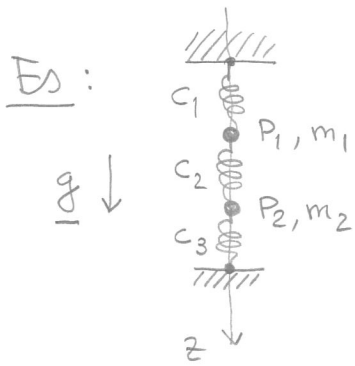
Vediamo l'errore sulle singole componenti:

① ad es $\hat{x} = \begin{pmatrix} \gamma + \frac{1}{10}\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{|x_1^* - \hat{x}_1|}{|x_1^*|} = \frac{|\gamma - \gamma - \frac{1}{10}\gamma|}{|\gamma|} = \frac{1}{10}; \quad |x_2^* - \hat{x}_2| = 0$$

② ad es $\hat{x} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \frac{1}{10}\gamma \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{|x_1^* - \hat{x}_1|}{|x_1^*|} = 0; \quad \frac{|x_2^* - \hat{x}_2|}{|x_2^*|} = \frac{|0 - \frac{1}{10}\gamma|}{0} \quad \text{"} = \infty \text{" !}$$



Eg. statica:

$$\textcircled{1} \quad m_1 g - c_1 z_1 + c_2 (z_2 - z_1) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad m_2 g + c_2 (z_1 - z_2) - c_3 (z_2 - h) = 0$$

sistema da studiare:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g + c_3 h \end{bmatrix}$$

\swarrow b

- parametri: $c_1 = c_2 = c_3 = 100 \text{ N/m}$
 $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $h = 5 \text{ m}$

- soluzione: $z_1^* \approx 1,76 \text{ m}$; $z_2^* \approx 3,43 \text{ m}$

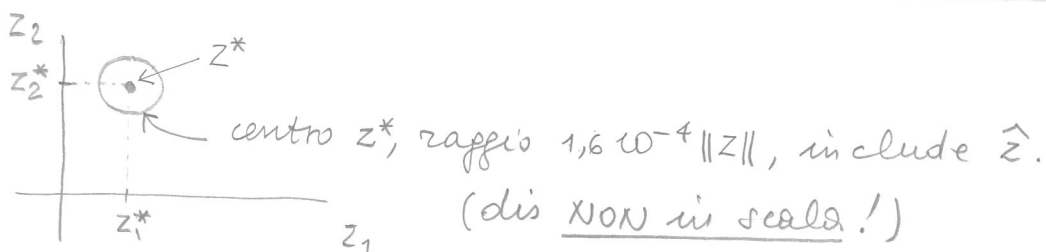
- valore g noto solo con approssimazione: $|\delta g| < 10^{-2}$
 \Rightarrow perturbazioni dati: $f = \begin{bmatrix} m_1 \delta g \\ m_2 \delta g \end{bmatrix}$, $E = 0$,

$$\frac{\|f\|}{\|b\|} \approx \frac{\sqrt{2}}{510} |\delta g| < 2,7 \cdot 10^{-5} \quad (= \alpha)$$

- $c(A) = 3 \Rightarrow \alpha c(A) < \frac{1}{10}$

- \hat{z} : soluzione con \hat{g} t.c. $|g - \hat{g}| < 10^{-2} \dots$

Teo condiz \Rightarrow $\frac{\|\hat{z} - z^*\|}{\|z^*\|} \leq 2 \alpha c(A) \approx 1,6 \cdot 10^{-4}$



- valori delle c_k noti solo con approssimazione: $|\delta c_k| < 1$

\Rightarrow perturbazione dati: $E = \begin{bmatrix} \delta c_1 + \delta c_2 & -\delta c_2 \\ -\delta c_2 & \delta c_2 + \delta c_3 \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 \\ h \delta c_3 \end{bmatrix}$

$$\frac{\|E\|}{\|A\|} \leq \frac{3}{300} = 10^{-2}; \quad \frac{\|f\|}{\|b\|} \leq \frac{5}{510} < 10^{-2}$$

$= \alpha$

- $\alpha c(A) < \frac{1}{10}$

- \hat{z} soluzione con \hat{c}_k t.c. $|c_k - \hat{c}_k| < 1 \dots$

Teo condiz $\Rightarrow \frac{\|\hat{z} - z^*\|}{\|z^*\|} \leq 2 \alpha c(A) \simeq 6 \cdot 10^{-2}$

Es: stessa struttura ed ep dell' Es precedenti.

- $\hat{z} \in \mathbb{R}^2$ soluzione approssimata, calcolata ad es con una procedura che realizzi uno dei proceduri visti (usando fatt LR o QR);

- def (residuo): $r = A\hat{z} - b$ (RESIDUO)

$\neq 0$ a meno che \hat{z} soluzione esatta!

- \hat{x} è SOLUZIONE ESATTA del SISTEMA PERTURBATO

$$AZ = b + r$$

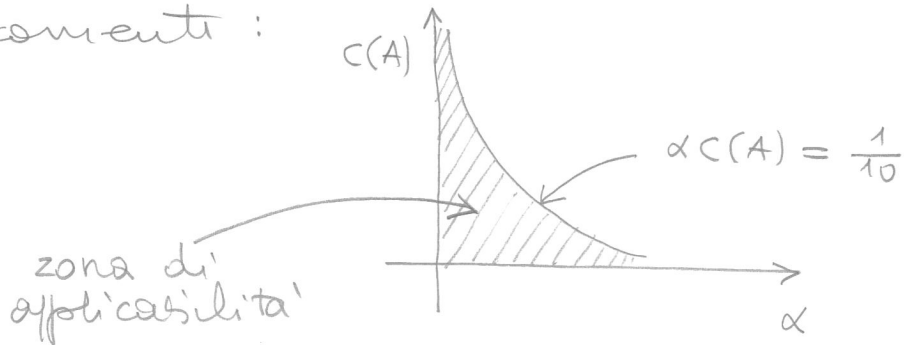
• $\alpha = \frac{\|r\|}{\|b\|}$, $c(A)$ numero di condiz di A ;

se $\alpha c(A) < \frac{1}{10}$ allora

$$\text{tes condiz} \Rightarrow \frac{\|\hat{z} - z^*\|}{\|z^*\|} \leq 2 \alpha c(A)$$

Oss: Per utilizz tes condiz occorre $\alpha c(A) < \frac{1}{10}$.

Graficamente:



... piu' e' GRANDE $c(A)$, piu' PICCOLO deve essere α ...