CN # 31,32 / 14 aprile 2014 / C43

---

* FATTORIZZAZIONE QR *

def: U, T fatt QR di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ significa

1) $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonale (colonne base o.n di $\mathbb{R}^n$)
2) $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tr superiore
3) $UT = A$

- int geometrica:

sia U, T una fatt QR di $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

u_1, u_2, u_3 (colonne di U) sono base o.n di $\mathbb{R}^3$ t.c.

$$(a_1, a_2, a_3) = (u_1, u_2, u_3) \boxed{\begin{matrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{matrix}}$$

$\Rightarrow$ u_1, a_1 "sono sulla stessa retta",
u_1, u_2 e a_1, a_2 "sono sullo stesso piano",
u_1, u_2, u_3 e a_1, a_2, a_3 ...

• determinazione di una fatt QR :

Es : $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Passo 1 : si cercano $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ a colonne ortogonali (non necess di norma uno!) e Θ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ t.c. $A = \Omega\,\Theta$.

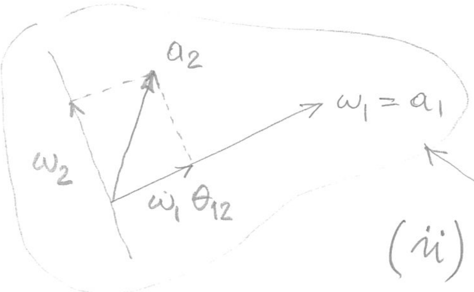
$$(a_1, a_2, a_3) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} a_1 = \omega_1 \\ a_2 = \omega_1 \theta_{12} + \omega_2 \\ a_3 = \omega_1 \theta_{13} + \omega_2 \theta_{23} + \omega_3 \end{cases}$$

Eq. 1 $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_1 = a_1}$

Eq. 2 $\Rightarrow$ (i.1) $a_2 \cdot \omega_1 = (\omega_1 \theta_{12} + \omega_2) \cdot \omega_1 =$ ($\omega_2 \cdot \omega_1 = 0!$)

$= \theta_{12} (\omega_1 \cdot \omega_1)$



SE $\omega_1 \neq 0$ ALLORA $\boxed{\theta_{12} = \dfrac{a_2 \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}}$

ALTRIMENTI STOP

(ii) $\boxed{\omega_2 = a_2 - \omega_1 \theta_{12}}$

Eq. 3 $\Rightarrow$ (i.1) $a_3 \cdot \omega_1 = (\omega_1 \theta_{13} + \omega_2 \theta_{23} + \omega_3) \cdot \omega_1 =$

$= \theta_{13} (\omega_1 \cdot \omega_1) \Rightarrow \boxed{\theta_{13} = \dfrac{a_3 \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}}$

(i.2) $a_3 \cdot \omega_2 = (\omega_1 \theta_{13} + \omega_2 \theta_{23} + \omega_3) \cdot \omega_2 =$

$= \theta_{23} (\omega_2 \cdot \omega_2)$

SE $\omega_2 \neq 0$ ALLORA $\boxed{\theta_{23} = \dfrac{a_3 \cdot \omega_2}{\omega_2 \cdot \omega_2}}$

ALTRIMENTI STOP

(ii) $\boxed{w_3 = a_3 - w_1\theta_{13} - w_2\theta_{23}}$

<u>Oss</u>: <u>Passo 1</u> termina regolarmente $\iff$ $a_1,\dots,a_{n-1}$ lin indip.

<u>Passo 2</u>: se possibile, si normalizzano le colonne di Ω e se ne ricava una fatt QR.

(i) $\Delta = \mathrm{diag}\left(\underbrace{\|w_1\|, \|w_2\|}_{\neq 0}, \underbrace{\|w_3\|}_{\neq 0\,?}\right)$

(ii) <u>SE</u> $w_3 \neq 0$ <u>ALLORA</u>:

$$\Omega\theta = \underbrace{(\Omega\Delta^{-1})}_{U}\underbrace{(\Delta\theta)}_{T}$$

U, T è fatt QR!

<u>ALTRIMENTI</u> STOP.

<u>Oss</u>: <u>Passo 1</u> e <u>Passo 2</u> terminano regolarmente $\iff$ A non singolare. Se terminano regolarmente, U, T è fatt QR di A.

- <u>uso della fatt QR per risolvere $Ax=b$</u>

$[U,T] = GS(A)$ → funzione che realizza i due passi descritti se GS ha fallito allora STOP; $\boxed{\Rightarrow \det A = 0}$

$c = U^T b;$

$x = SI(T, c);$

PROCEDIMENTO SODDISFACENTE !

---

* CONDIZIONAMENTO *

... del Pb della soluz di un sist di eq lineari.

- A invertibile $\in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\exists!\, x_*$ t.c. $Ax_* = b$ (soluzione)

- $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ perturbazione (additiva) di A

  $f \in \mathbb{R}^n$ " " di b

- ip: $A+E$ invertibile ...

  $\Rightarrow \exists!\, \hat{x}$ t.c. $(A+E)\hat{x} = b+f$

- dati   soluzione

Pb: assegnato un modo di misurare gli errori, determ quanto grande può essere l'err sulla sol in funzione di quanto grande è quello sui dati.

Es: $E = 0$, $f \neq 0$

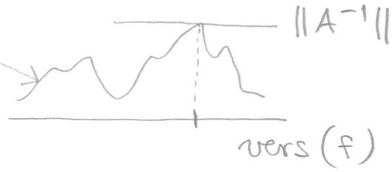
- x_* t.c $A x_* = b$
- $\hat{x}$ t.c $A\hat{x} = b + f$
- $A(\hat{x} - x_*) = (b+f) - b = f \Rightarrow \boxed{\hat{x} - x_* = A^{-1} f}$
- $\|\hat{x} - x_*\| = \|A^{-1} f\|$ "errore assoluto"

$$f = \frac{f}{\|f\|}\|f\|$$

$\frac{f}{\|f\|}$ = vers(f): vettore di norma uno che specifica la direzione di f

$$\Rightarrow \|\hat{x} - x_*\| = \|A^{-1}(\|f\| \, \mathrm{vers}(f))\|$$

$$= \|A^{-1} \mathrm{vers}(f)\| \, \|f\|$$



posto $\|A^{-1}\| \equiv \max_{f \neq 0} \|A^{-1} \mathrm{vers}(f)\|$

$$= \max\{\|A^{-1}v\|, \|v\| = 1\}$$

si ha: $\|\hat{x} - x_*\| \leq \|A^{-1}\| \, \|f\|$

$\boxed{\exists f \text{ t.c. } =}$

- $b \neq 0$ ($\Rightarrow x_* \neq 0$): $\dfrac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \dfrac{\|f\|}{\|x_*\|}$

"errore relativo"

$\max\{\|Av\|, \|v\| = 1\}$

MA: $Ax_* = b \Rightarrow \|b\| = \|Ax_*\| \leq \|A\| \, \|x_*\|$

$\boxed{\exists x_* \text{ (ovvero } b) \text{ t.c. } =}$

$$\Rightarrow \frac{\|b\|}{\|x_*\|} \leq \|A\|$$

err relativo su b

quindi: $\dfrac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \dfrac{\|f\|}{\|b\|} \dfrac{\|b\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|A\| \dfrac{\|f\|}{\|b\|}$

<u>def</u> (numero di condizionamento)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile:

$$c(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$ ← NUMERO di CONDIZIONAMENTO <u>di A</u>

(dip dalla norma!)