Classi di matrici per le quali EG termina regolarm.

(SDP) Simmetriche Definite Positive

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SDP significa:

1) $A^T = A$ (simmetrica)

2) $\forall x \begin{cases} \in \mathbb{R}^n \\ \neq 0 \end{cases}$, $F(x) = x^T A x > 0$

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Oss: } A \text{ è SDP} \iff \det A[k] > 0 \text{ per } k = 1, \dots, n}$$

(PDF) a Predominanza Diagonale Forte

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a PDF significa:

$\underbrace{\forall k = 1, \dots, n}_{\text{per ogni RIGA...}}$: $|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ (PDF per righe...)

Oss: A è PDF $\Rightarrow \det A \neq 0$

e $A[k]$ è PDF, $k = 1, \dots, n$

* Procedura EGP *

Es: •

$$\underset{A}{\overset{A^{(1)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_1} \underset{H_1 A^{(1)}}{\overset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}} \xrightarrow{P_2} \underset{P_2 A^{(2)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}} \xrightarrow{H_2} \underset{H_2 P_2 A^{(2)}}{\overset{A^{(3)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}} \xrightarrow{P_3}$$

$$\to \underset{P_3 A^{(3)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}} = D$$

• $D = P_3 H_2 P_2 H_1 A \Rightarrow A = \underbrace{H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T}_{\text{NON è tr inf con 1 sulla diag...}} D$

MA: $\underbrace{P_3 P_2 \left(H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T \right)}_{= S}$ sì!

quindi: $\underbrace{P_3 P_2}_{P} A = SD$

$$\boxed{EGP(A) = [S, D, P]}$$

t.c. S, D è fatt LR di $PA = EG(PA)$

Procedura EGP

Es: $D = H_3 P_3 H_2 P_2 H_1 P_1 A \Rightarrow A = \underbrace{P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T H_3^{-1}}_{\text{NON è tr inf ...}} D$

... MA: $\overbrace{(P_3 P_2 P_1)}^{P} \underbrace{(P_3 P_2 P_1)(P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T H_3^{-1})}_{S}$ lo è!

$$\Rightarrow \quad PA = SD \; ; \quad [S, D, P] = EGP(A)$$

$$[S, D] = EG(PA)$$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&2&2&0\\1&2&3&1\end{bmatrix} \xrightarrow{H_1} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&2&0\\0&1&3&1\end{bmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&1&3&1\end{bmatrix} \xrightarrow{H_2} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{H_3} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = D \; ; \qquad P = P_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$$S = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

- calcolare SD e PA, calcolare $H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} H_3^{-1}$ e la stessa per P a sinistra.

TEO (terminazione regolare EGP)
la procedura EGP determina una matrice di permutazione P ed una fatt LR di $PA \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Leftrightarrow$ le prime $n-1$ colonne di A sono linearmente indipendenti.

- uso di EGP, SA, SI per risolvere $Ax = b$

$[S, D, P] = EGP(A);$ $\boxed{\Rightarrow \det A = 0}$

se EGP ha fallito allora STOP;

$c = SA(S, Pb);$

se $\det D = 0$ allora STOP;

$x = SI(D, c)$

PROCEDIMENTO SODDISFACENTE!

$\left(Ax = b \rightarrow PAx = Pb \rightarrow SDx = Pb \ldots \right)$