

• Caso generale

idea: fattorizzare A con (scrivere A come prodotto di) fattori 'semplici'...

Es: ① fattorizzazione LR (o LU):

$$S, D \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ t.c.}$$

- S tr inf con $s_{kk} = 1$ (\Rightarrow invertibile)
- D tr sup
- $SD = A$

$$A \text{ invert} \Leftrightarrow D \text{ invert}$$

② fattorizzazione QR:

$$U, T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ t.c.}$$

- U ortogonale (\Rightarrow invertibile)
- T tr sup
- $UT = A$

$$A \text{ invert} \Leftrightarrow T \text{ invert}$$

... poi (uso della fattorizz $A = MX$):

$$Ax = b \sim MX = b$$

- cambio variabili : $c = Nx$
- $Mc = b$ caso semplice : determino c
- $Nx = c$ caso semplice : determino x

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

- verificare che la fattorizzazione è corretta (è LR)
- risolvere il sistema usando SA, SI.

Pb: come determinare una fattorizzazione?

- LR: eliminazione di Gauss;
- QR: procedura di ortonormalizzazione.

* Procedura EG *

Es:

$$\begin{array}{c} A^{(1)} \\ \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \\ A \end{array} \xrightarrow{H_1} \begin{array}{c} A^{(2)} \\ \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ H_1 A^{(1)} \end{array} \xrightarrow{H_2} \begin{array}{c} A^{(3)} \\ \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\ H_2 A^{(2)} \end{array} = D$$

• $D = H_2 A^{(2)} = H_2 (H_1 A^{(1)}) = (H_2 H_1) A$

$\Rightarrow A = \underbrace{H_1^{-1} H_2^{-1}}_{= S} D$