CN # 20,21 / 1 aprile 2014 / C43

Es : $f(x) = (x-2)^2 \quad , \quad x_0 = 3$

- Il m. di Newt genera una succes monotona (decrescente) e $\lim_{k \to \infty} x_k = 2$

dim :
$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k-2)^2}{2(x_k-2)} = x_k - \frac{x_k-2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} - 2 = \frac{1}{2}(x_k - 2)$$

$$\Rightarrow \quad |x_k - 2| = \left(\frac{1}{2}\right)^k |x_0 - 2| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

- la rapidità di conv è ≈ quella del metodo di bisezione !

ORDINE di CONVERGENZA del M di Newt in questo caso: UNO $\left[h'(x) = \frac{1}{2} \right]$

<u>Es</u>: $f(x) = (x-2)^{13}$, $x_0 = 3$

- Il m di Newt genera una succes decrescente con $\lim_{k \to \infty} x_k = 2$

- La convergenza è MOLTO LENTA :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k-2)^{13}}{13(x_k-2)^{12}} = x_k - \frac{x_k-2}{13}$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} - 2 = \frac{12}{13}(x_k - 2)$$

$$\Rightarrow \quad |x_k - 2| = \left(\frac{12}{13}\right)^k |x_0 - 2|$$

Se, ad es, si vuole $|x_k - 2| < 10^{-7}$

occorrono ....

$$\left(\frac{12}{13}\right)^k < 10^{-7} \Rightarrow k > -\frac{7}{\log_{10}\frac{12}{13}} \approx 200$$

iterazioni

---

* CRITERIO di ARRESTO *

SE $\left|\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right| < tol$ ALLORA STOP

- "calcolabile"
- se $x_k \to \alpha$ allora $f(x_k) \to 0$;

  se inoltre $f'(\alpha) \neq 0$ allora $\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \to 0$:

  $\boxed{\text{certamente verif dopo un numero finito di it}}$

- $$x_k - \alpha = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2}\frac{f''(\theta)}{f'(x_k)}(x_k-\alpha)^2$$

$$\Rightarrow \left| \underbrace{|x_k-\alpha|}_{d_k} - \underbrace{\left|\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right|}_{F_k} \right| \leq \frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1}|x_k-\alpha|^2$$

$m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)| \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{|d_k - F_k|}{d_k} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1} d_k}$$

SE $x_k \to \alpha$, $d_k \to 0$

ALLORA : $\boxed{\text{err rel} \to 0}$

Nella pag WEB:

- file di def di una funzione che realizza il m. di Newt

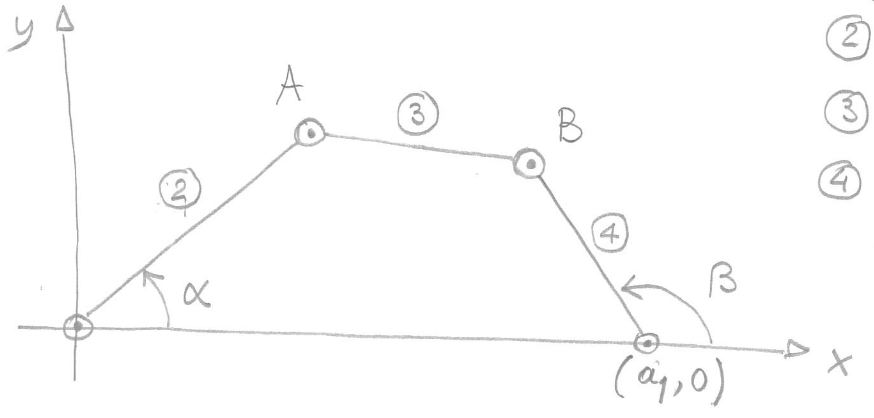
  uso :

  [z, v, info, xxx_newt] =

  = newton1d (f_newt, x0_newt, Jf_newt, E_newt, kmax, dialogo_newt)

- file con esempi "guidati".

Es (cinematica) :



Lungh aste :

② $a_2 = 13$ cm

③ $a_3 = 8$ cm

④ $a_4 = 10$ cm

$a_1 = 10$ cm

- legami tra α e β :

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_2 \cos\alpha \\ a_2 \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} , \quad B \equiv \begin{pmatrix} a_1 + a_4 \cos\beta \\ a_4 \operatorname{sen}\beta \end{pmatrix}$$

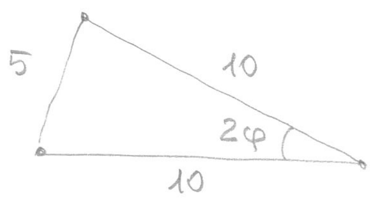
$$d^2(A,B) = a_3^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + 2a_1a_4\cos\beta \cdot$$
$$- 2a_1a_2\cos\alpha - 2a_2a_4\cos(\alpha-\beta) = 0$$

- det i DUE possibili valori di α per $\beta = 0$

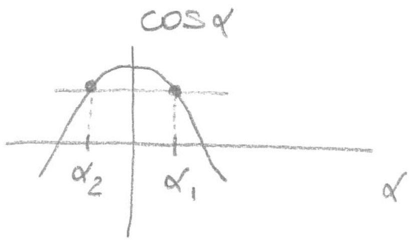
- Assegnato $\beta \leq \beta_{MAX}$, $\exists$ (uno o due) valori di α "compatibili". Per $\beta > \beta_{MAX}$ $\nexists$ α compatibili. Determinare β_{MAX}.

(



$\operatorname{sen}\varphi = 0{,}25 \ldots$)

Es (cinematica):

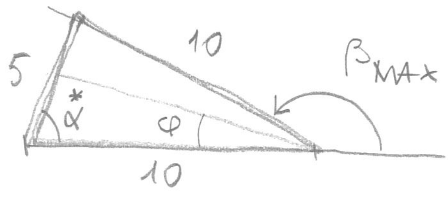


- Per $\beta = 0$: $\cos\alpha = \frac{505}{520}$

$$\alpha_1 = \operatorname{acos}\frac{505}{520} \in [0,\pi]$$

$$\simeq 0{,}24 \text{ rad}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \simeq -0{,}24 \text{ rad}$$



- $\varphi = \operatorname{asen} 0{,}25 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\simeq 0{,}25$$

$$\beta_{MAX} = \pi - 2\varphi \simeq 2{,}636 \text{ rad}$$

$$\overset{*}{\alpha} = \operatorname{acos} 0{,}25 \in [0,\pi]$$

$$\simeq 1{,}32 \text{ rad}$$

- **Pb**: per $\beta \in [0, \beta_{MAX}]$, determ i valori di α compatibili.

- $N = 100;$
  $d\beta = \dfrac{\beta_{MAX}}{N};$

$\alpha_0^+ = 0,24;$

$\alpha_0^- = -0,24;$

per $k = 1, 2, \dots, N+1$ ripeti:

$\beta = (k-1)\, d\beta$

1ª sol
$\alpha_k^+ = newton(F, \alpha_0^+, \dots)$
$\alpha_0^+ = \alpha_k^+$

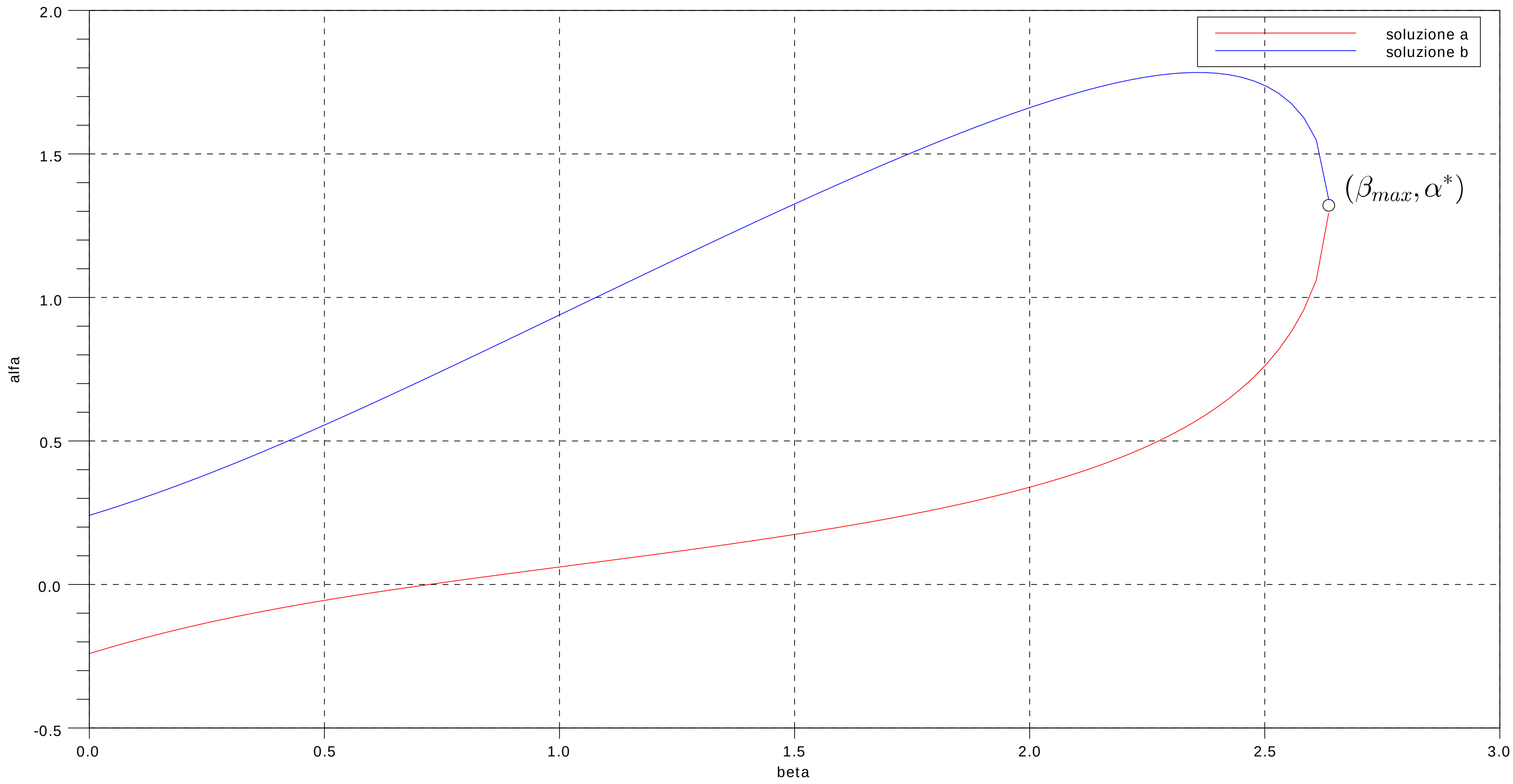
2ª sol
$\alpha_k^- = newton(F, \alpha_0^-, \dots)$
α_0^-

$F(\alpha, \beta)$ — α: da trovare; β: assegnato

l'iteraz success assume come v. iniziale il val attuale!

- si ottiene (vedere disegno...)

... ovvero <u>si SUPPONE</u> che α_{k-1}^+ sia suff vicino ad α_k^+ da generare una success convergente (ad α_k^+).



soluzione a
soluzione b
(β_{max}, α^*)
alfa
beta
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0