CN # 18,19 / 31 marzo 2014 / C43

* METODO di NEWTON *

- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con derivata $f'\neq 0$ su $[a,b]$, è il m. it ad un punto def da

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- PROPRIETÀ:

(I) $f(x)=0$ equivalente a $x=h(x)$

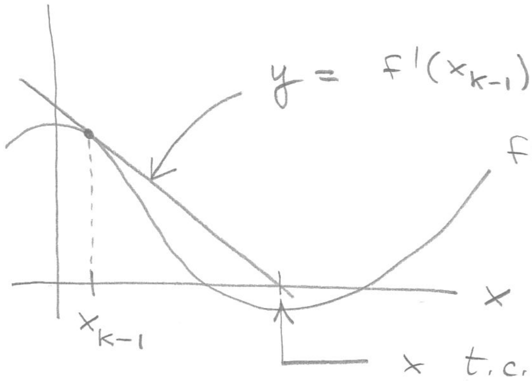
(II) se $f\in \mathcal{C}^2[a,b]$ e α zero di f allora:

$$h'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

$\Rightarrow \boxed{h'(\alpha)=0}$ (si ricordi che, per ip, $f'(x)\neq 0$)

$\boxed{\text{Teo conv LOCALE} \Rightarrow \text{m di NewT certam utili per attorno } \alpha.}$

(III) Int geometrica (METODO delle TANGENTI):



<u>ovvero</u>: $x = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} = h(x_{k-1})$

(IV) Scelta di x_0 per m di NewT:

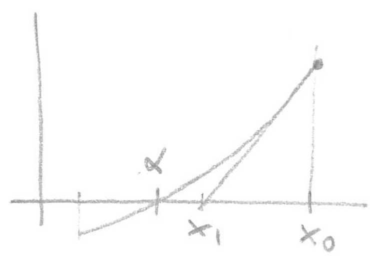
<u>SE</u> $[a,b]$, $f \in C^2[a,b]$, x_0 t.c.

1) $\exists\, \alpha \in [a,b]$ zero di f
2) $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0$ $[\Rightarrow \alpha$ unico zero$]$
3) $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$

<u>ALLORA</u>: la succes gen dal m di NewT a partire da x_0...

1) è CONVERGENTE ad α
2) è MONOTONA

<u>dim</u>: graficamente...



$\alpha < \ldots < x_1 < x_0$

(V) sia $x_k \to \alpha$ gen da m. it def da h con $x_k \neq \alpha$ per ogni k; allora:

$$x_{k+1} - \alpha = h(x_k) - h(\alpha) =$$

$$= h'(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{1}{2} h''(\theta)(x_k - \alpha)^2$$

con θ tra x_k ed α

SE $\boxed{h'(\alpha) \neq 0}$ ALLORA: $\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = |h'(\alpha)|$

$|h'(\alpha)| < 1$

ORDINE di CONV = 1

SE $h'(\alpha) = 0$ ALLORA: $\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \frac{1}{2} |h''(\alpha)|$

ORDINE di CONV = 2

[e h suff regolare ...]

Confronto:

1 $d_{k+1} = |h'(\alpha)| d_k$

$\Rightarrow d_k = |h'(\alpha)|^k d_0$

$\Rightarrow \log_{10} d_k = k \log_{10} |h'(\alpha)| + \log_{10} d_0$

2 $d_{k+1} = M d_k^2$

$\Rightarrow d_k = \frac{(M d_0)^{2^k}}{M}$ [ip: $M d_0 < 1$]

$\Rightarrow \log_{10} d_k = 2^k \log_{10} (M d_0) - \log_{10} M$

$$\boxed{\frac{k}{2^k} \xrightarrow{k \to \infty} 0 \Rightarrow \text{odc 2 più rapido di } \forall \text{ odc 1}}$$

Es: $f(x) = x + \ln x$

- $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ zero di f

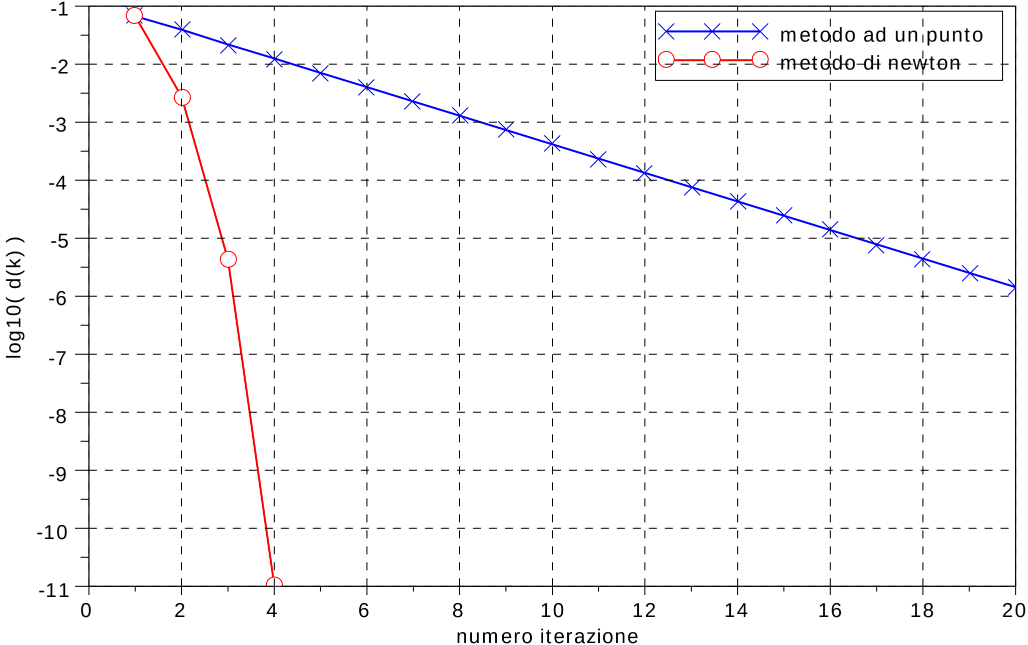
- $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$
- $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ success $x_k \longrightarrow \alpha$, crescente.

Confronto tra

1) success gen dal m. it def da $h_2(x) = e^{-x}$ a partire da $x_0 = \frac{1}{2}$

2) success gen dal m di Newt a partire da $x_0 = \frac{1}{2}$

Per entrambe l'err (assoluto) iniziale è $|x_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \simeq 7 \cdot 10^{-2}$



metodo ad un punto
metodo di newton
log10(d(k))
numero iterazione
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

Oss: $x_k \to \alpha$ con:

- $|x_k - \alpha| = |h'(\theta)|\,|x_{k-1} - \alpha|$, θ tra x_{k-1} e α

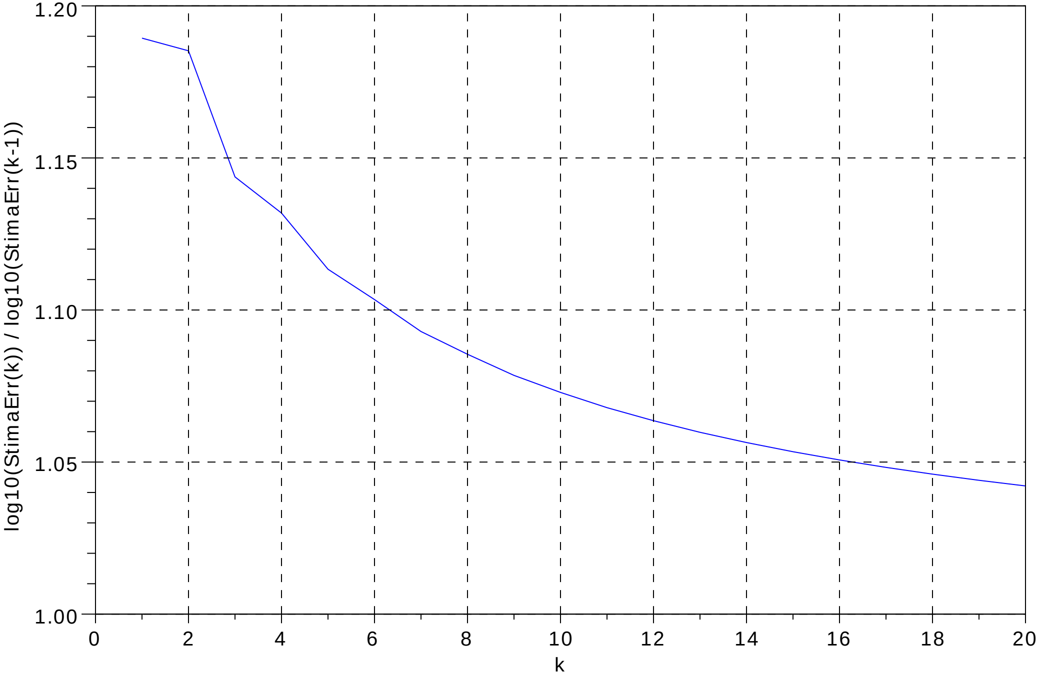
$$\Rightarrow \frac{\log|x_k - \alpha|}{\log|x_{k-1} - \alpha|} \longrightarrow 1$$

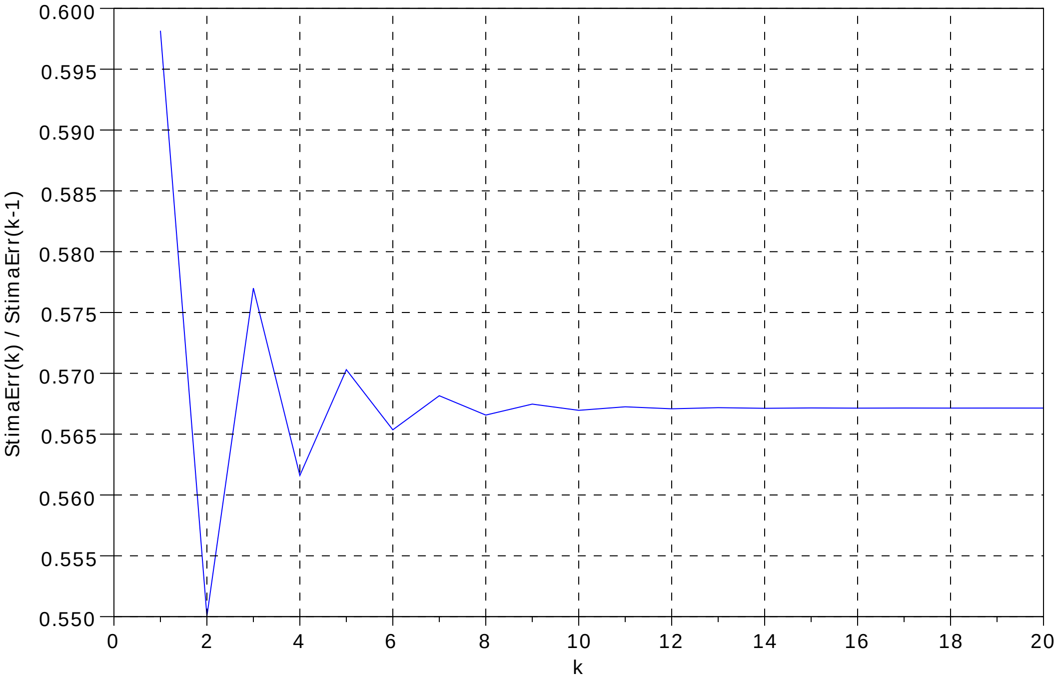
e $$\frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|^1} \longrightarrow |h'(\alpha)| \quad (< 1)$$

- $|x_k - \alpha| = \frac{1}{2}|h''(\theta)|\,|x_{k-1} - \alpha|^2$, θ tra x_{k-1} e α

$$\Rightarrow \frac{\log|x_k - \alpha|}{\log|x_{k-1} - \alpha|} \longrightarrow 2$$

e $$\frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|^2} \longrightarrow \frac{1}{2}|h''(\alpha)| \quad (\neq 0 \ldots)$$


1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
k
log10(StimaErr(k)) / log10(StimaErr(k-1))



0.600
0.595
0.590
0.585
0.580
0.575
0.570
0.565
0.560
0.555
0.550
StimaErr(k) / StimaErr(k-1)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
k

<u>ALLORA</u> : scelto x_0 = l'estremo di $[a,b]$

in cui $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$, si ha

- $x_k \to \alpha$ (monotona)
- $$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2} = \frac{1}{2}\,|h''(\alpha)|$$

<u>Oss</u>: se $h''(\alpha) = 0$, la conv della success

sara' <u>PIÙ RAPIDA</u> ...