* CRITERI D'ARRESTO *

- siano $[a,b]$, h che verificano le ip (1) e (2') del Teo di convergenza, α punto unito di h in $[a,b]$, x_k una succes generata dal m. it def da h con $x_k \in [a,b]$, $x_k \to \alpha$.

$\boxed{1}$ se $|x_{k+1} - x_k| < tol$ allora STOP

- è calcolabile e efficace $(x_{k+1} - x_k \to 0 \ldots)$

- $$x_{k+1} - x_k = h(x_k) - x_k =$$
$$= (h(x_k) - h(\alpha)) - (x_k - \alpha)$$
$$= (h'(\theta) - 1)(x_k - \alpha)$$
con θ tra x_k e α

$$\Rightarrow |x_{k+1} - x_k| = \underbrace{|1 - h'(\theta)|}_{= 1 + \varepsilon_k \text{ con } |\varepsilon_k| \le L < 1} |x_k - \alpha|$$

Posto: $|x_k - \alpha| = d_k$, $|x_{k+1} - x_k| = \Delta_k$

si riscrive: $\quad d_k = (1-\varepsilon_k)\,\Delta_k$

$$\text{con} \quad \lim_{k\to\infty} |\varepsilon_k| = |h'(\alpha)| < 1$$

Per k grande, Δ_k approssima d_k con errore relativo $\simeq |h'(\alpha)|$

Es: $\quad h'(\alpha) = \dfrac{1}{100}\,, \quad d_k = 10^{-4}$

$$\Rightarrow \Delta_k \in 10^{-4} \pm 10^{-6} \quad (\text{bene: } \Delta_k \approx d_k)$$

Ma se $\quad h'(\alpha) = \dfrac{9}{10}\,, \quad d_k = 10^{-4}$

$$\Rightarrow \Delta_k \in [0{,}1\; 10^{-4}\,;\; 1{,}9\; 10^{-4}]$$

(meno bene: Δ_k può essere significativamente più piccolo o più grande di d_k!)

$\boxed{2}$ se $\left| \dfrac{x_{k+1} - x_k}{1 - h'(x_k)} \right| < tol$ allora STOP

- è calcolabile e efficace $\left(\dfrac{x_{k+1} - x_k}{1 - h'(x_k)} \to 0 \ldots \right)$

- $\dfrac{x_{k+1} - x_k}{1 - h'(x_k)} = \dfrac{h'(\theta) - 1}{1 - h'(x_k)}\,(x_k - \alpha)$ con θ tra...

- posto $\left| \dfrac{x_{k+1} - x_k}{1 - h'(x_k)} \right| = F_k$ si ha :

$$F_k = \underbrace{\left| \frac{1 - h'(\theta)}{1 - h'(x_k)} \right|} d_k$$

$$= \frac{1 - h'(\theta)}{1 - h'(x_k)} = 1 + \varepsilon_k$$

con $\varepsilon_k = \dfrac{h'(x_k) - h'(\theta)}{1 - h'(x_k)} \xrightarrow{k \to \infty} 0$

Per k grande, F_k approssima d_k con errore relativo $\longrightarrow 0$!

Esercizio : sia $h(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- determ i pti uniti di h (siano α_0, α_1);
- determ $h'(\alpha_0)$, $h'(\alpha_1)$ ed utilizz per decidere se il m. it def da h sia utilizz per appross α_0 ed α_1;
- modif il file di esempio relativo ai metodi ad un punto (LMV_MetodiUnPunto_00.sce) per utilizzarlo con la funz h assegnata (N.B: utilizz opportunam l'operatore .^ :

  se x è una matrice r×s, allora

  x.^2 = la matrice r×s di elem i,j dato da x_{ij}^2);

- Scegliere $x_0 = 0.45$ ed interpretare il grafico finale riguardante la stima dell' errore;
- Scegliere $x_0 = 0,5$ e giustificare l'errore dichiarato dalla procedura;
- Scegliere $x_0 = -1$ ed interpretare i risultati (l'iterazione termina con successo, ma poi nasce un problema nel grafico finale ...)
- Scegliere $x_0 = -0.999$ e poi $x_0 = -1,001$:

accade qualcosa di "imprevisto" ?

- determ tutti i valori x_0 t.c. la success generata dal m. it def da h a partire da x_0 converge a 1.