Oss :

- sotto le ip del TEO di convergenza, la success

$$\delta_k = |x_k - \alpha|$$

degli errori assoluti (che $\to 0$):

(A) è MONOTONA decrescente;

(B) $\delta_k \leq L^k \delta_0$: tende a 0 con velocità ALMENO pari a quella di L^k.

- SE $h \in \mathcal{C}^1[a,b]$ ⓔ $\forall x \in [a,b]$ si ha $|h'(x)| \leq L$

ALLORA :

ip

$$\forall x,y \in [a,b], \ |h(x) - h(y)| = |h'(\theta)|\,|x-y| \leq L\,|x-y|$$

tra x ed y

Teo di Lagrange

quindi, una condiz che implica l'ip (2) del TEO di convergenza è :

$$\boxed{(2')\quad h \in C^1[a,b] \text{ ed } \exists L \in [0,1) \text{ t.c. } \forall x \in [a,b] \text{ si ha } |h'(x)| \le L}$$

- **SE** ip (1) e (2) del Teo di conv sussistono per $[a,b]$ e $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, **ALLORA**: posto

$$\boxed{\gamma = \text{l'estremo di } [a,b] \text{ più vicino ad } \alpha}$$

si ha: $|x_1-\alpha| \le L|\overbrace{x_0}^{=\gamma\in[a,b]}-\alpha| < |x_0-\alpha| \Rightarrow x_1 \in [a,b]$,

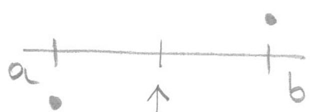
$|x_2-\alpha| \underset{\text{perché } x_1\in[a,b]}{\le} L|x_1-\alpha| \le L^2|x_0-\alpha| < |x_0-\alpha| \Rightarrow x_2 \in [a,b]$

ecc, ovvero la success $x_0=\gamma$, $x_1=h(x_0)$, ... È IN $[a,b]$!

Oss: SE α pto centrale di $[a,b]$, $\forall \gamma$ si ottiene success convergenti

Pb: come decido quale dei due estremi di $[a,b]$ è più vicino ad α?

Considero $F(x) = x - h(x)$: è CRESCENTE in $[a,b]$ e $F(\alpha)=0 \Rightarrow$



$F(a)<0$, $F(b)>0$ e valutando il segno di $F\left(\frac{a+b}{2}\right)$...

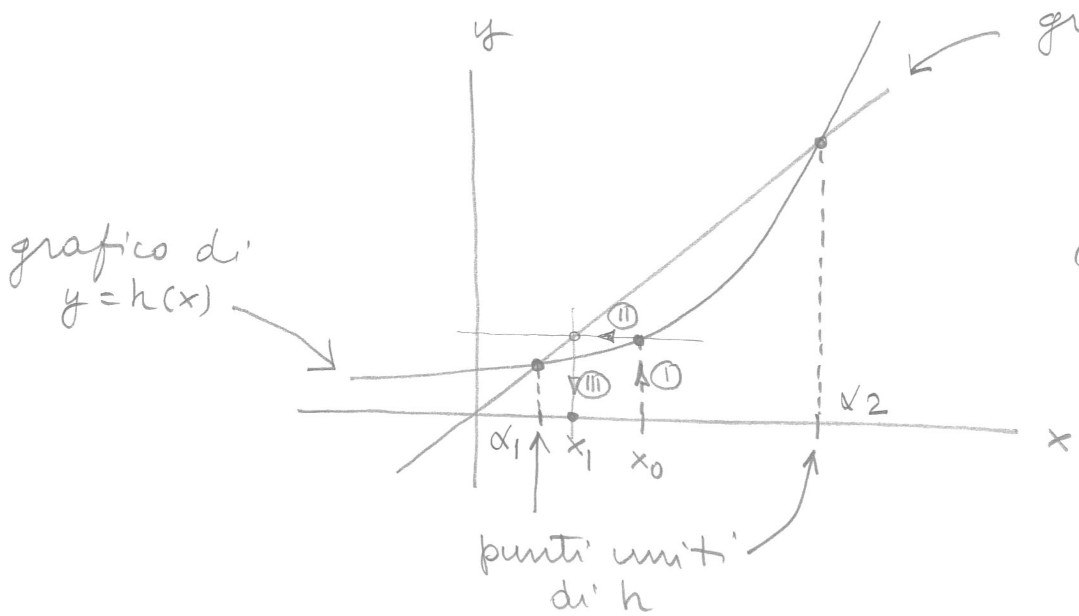
- **Teo** (di convergenza LOCALE):

  siano $h \in C^1[a,b]$ e $\alpha \in [a,b]$ pu di h.

  SE $|h'(\alpha)| < 1$ ALLORA $\exists\, \rho > 0$ t.c. ip Teo di convergenza verificate da $[\alpha-\rho, \alpha+\rho]$, h e $\forall\, \gamma \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$

> Oss: NON si chiedono propr di h' valide GLOBALMENTE su $[a,b]$, ma SOLO in α. DI CONSEGUENZA si "trova" un intervallo $[\alpha-\rho, \alpha+\rho]$ su cui $|h'(x)| \leq L < 1$ per ogni x.

COSTRUZIONI GRAFICHE



I, II, III: procedura grafica per det x_1 a partire da x_0.

È graficamente evidente che $0 < h'(\alpha_1) < 1$ e $h'(\alpha_2) > 1$: il Teo di conv locale ci assicura che ...

Es: $f(x) = x + \ln x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

① # zeri di f e SEPARAZIONE

- $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ (f crescente $\Rightarrow$ # zeri ≤ 1)
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow \exists\, \alpha \in (0,1)$ zero

$\boxed{\exists \text{ un solo zero, } \alpha \in (0,1)}$

②
$$h_1(x) = -\ln x$$
$$h_2(x) = e^{-x}$$
$$h_3(x) = \frac{e^{-x} + x}{2}$$

Candidati per def m. it per approx α.

É vero che α zero di $f \Leftrightarrow \alpha$ pu di h_k ?

$\boxed{h_1}$ $f(\alpha) = 0 \sim \alpha + \ln \alpha = 0 \sim \alpha = -\ln \alpha$

$\sim \alpha = h_1(\alpha)$ OK

$\boxed{h_2}$ $f(\alpha) = 0 \sim \alpha = -\ln \alpha \sim -\alpha = \ln \alpha$

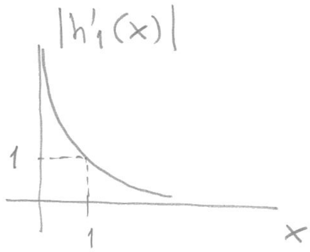
$\sim e^{-\alpha} = \alpha \sim \alpha = h_2(\alpha)$ OK

$\boxed{h_3}$ Es: verificare che OK!

③ h_1 utilizzabile ?

Cerco di applicare Teo conv locale :

$$h_1'(x) = -\frac{1}{x}$$

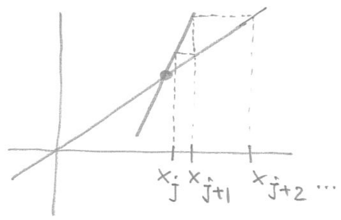


Siccome $\alpha \in (0,1)$,

CERTAMENTE $|h_1'(\alpha)| > 1$ ... il TEO non aiuta.

MA : $\boxed{\text{Se } x_k \text{ succes gen dal m. it def da } h, \ \alpha \text{ pu di } h \text{ e } |h'(\alpha)|>1 \text{ allora } \exists n \text{ t.c. } \forall k \geq n \text{ si ha } x_k = \alpha \text{ oppure } x_k \not\to \alpha}$

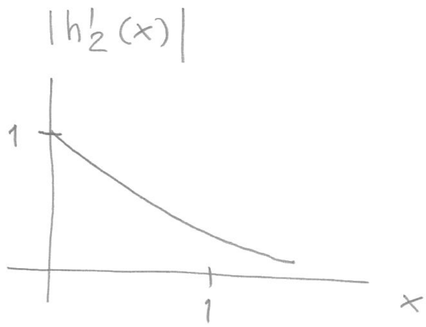
dim :



Dunque : h_1 NON UTILIZZABILE per approx α

④ h_2 utilizzabile ?

$$h_2'(x) = -e^{-x}$$



Siccome $\alpha \in (0,1)$,

CERTAMENTE $|h_2'(\alpha)| < 1$

$\Rightarrow \exists$ int che verifica (1) e (2) del Teo conv!