* METODO di NEWTON *

dati: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con derivata $\begin{cases}\text{continua}\\ \neq 0\end{cases}$, $\gamma\in\mathbb{R}$;

- $x_0=\gamma$
- per $k=1,2,3\ldots$ ripeti:

  se $x_{k-1}\notin[a,b]$ allora STOP

  altrimenti $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

uscita: quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k.

Caso particolare di METODO ad UN PUNTO:

la f. che "definisce il metodo"

dati: $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\gamma \in \mathbb{R}$

- $x_0 = \gamma$
- per $k = 1, 2, \dots$ ripeti:

 se $x_{k-1} \notin [a,b]$ allora STOP

 altrimenti $x_k = h(x_{k-1})$

uscita: quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k.

- Come funziona: se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$\boxed{e}$ la succes. x_0, $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1)$, ...

è CONVERGENTE ad $\alpha \in \mathbb{R}$, allora: $\alpha = h(\alpha)$

ovvero α è PUNTO UNITO di h.

dim:
$$\begin{array}{l} x_0, x_1, x_2, \dots \to \alpha \\ \quad\;\; \| \quad\; \| \\ h(x_0), h(x_1), h(x_2), \dots \to \alpha \end{array}$$

Ma:
$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} h(x_k)}_{=\alpha} \underset{h \text{ CONTINUA}}{=} h\Big(\underbrace{\lim_{k\to\infty} x_k}_{=\alpha}\Big)$$

q.di: $\alpha = h(\alpha)$.

Dunque: il metodo ad un punto def da h si può cercare di utilizz per APPROSSIMARE i PUNTI UNITI di h.

Oss: Nel m di Newton si ha

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \in [a,b] \text{ pu di } h \\ \qquad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in [a,b] \text{ zero di } f \end{array}}$$

dim: • α pu di h $\sim$ $\alpha = h(\alpha)$

ovvero $\cancel{\alpha} = \cancel{\alpha} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = 0$

• α zero di f $\sim$ $f(\alpha) = 0$

dunque $h(\alpha) = \alpha - \frac{\cancel{f(\alpha)}}{\cancel{f'}(\alpha)} = \alpha$.

Pb: (1) $\exists\, \gamma$ t.c. $x_0 = \gamma,\ x_1 = h(x_0), \dots$ è conv?

(2) Se $\exists$, come si determina?

TEO (di convergenza)

Siano $[a,b]$, $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, $\gamma \in [a,b]$ t.c.

(1) $\exists\, \alpha$ pu di h in $[a,b]$;

(2) $\exists\, L \in [0,1)$ t.c. $\forall\, x, y \in [a,b]$ si ha $|h(x)-h(y)| \leq L\,|x-y|$

(3) la success $x_0=\gamma$, $x_1=h(x_0)$, $x_2=h(x_1)$, ... è in $[a,b]$

Allora: ① α è l'unico pu di h in $[a,b]$;

② la success $x_0=\gamma$, $x_1=h(x_0)$, $x_2=h(x_1)$, ... è convergente (ad α)

---

dim: ① Per assurdo. ip: $\exists\, \beta \neq \alpha$ pu di h in $[a,b]$;

allora: $|\beta-\alpha| = |h(\beta)-h(\alpha)| \leq L\,|\beta-\alpha| < |\beta-\alpha|$, assurdo.

② $|x_k - \alpha| = |h(x_{k-1}) - h(\alpha)| \leq L\,|x_{k-1} - \alpha|$

ma: $|x_{k-1} - \alpha| = |h(x_{k-2}) - h(\alpha)| \leq L\,|x_{k-2} - \alpha|$

quindi: $|x_k - \alpha| \leq L^2\,|x_{k-2} - \alpha|$

iterando il ragionamento: $|x_k - \alpha| \leq L^k\,|x_0 - \alpha|$

e siccome $L < 1$: $\boxed{\lim_{k \to \infty} |x_k - \alpha| = 0}$
