• ARITMETICA del calcolatore

(1) Con quali numeri è capace di operare il calcolatore?

(2) Cosa sa fare con questi numeri?

---

1) NUMERI DI MACCHINA

• $x \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \neq 0 \end{cases}$, β intero ≥ 2 (BASE)

esiste un solo modo di scrivere x nella forma:

$$\boxed{x = (-1)^s \beta^b g}$$

con: $s \in \{0,1\}$ (SEGNO di x)

$b \in \mathbb{Z}$ (ESPONENTE di x in base β)

$g \in [\beta^{-1}, 1)$ (FRAZIONE di x in base β)

Es: $x = \sqrt{5}$, $\beta = 10 \Rightarrow s = 0$, $b = 1$, $g = \frac{\sqrt{5}}{10}$

$x = \sqrt{5}$, $\beta = 2 \Rightarrow s = 0$, $b = 2$, $g = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Oss: la condiz $g \in [\beta^{-1}, 1)$ si traduce così: la scrittura posizionale di g in base β ha la forma: $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$ con $c_1 \neq 0$.

Es: $x = \frac{1}{10}$, $\beta = 10 \Rightarrow s = 0$, $b = 0$, $g = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$x = \frac{1}{10}$, $\beta = 2 \Rightarrow s = 0$, $b = -3$, $g = \frac{8}{10} = 0{,}\overline{1100}$

la scrittura pos di g in base 2
(ha LUNGHEZZA infinita!)

- $\boxed{\text{se } \beta = 2,\ c_1 = 1 \text{ per ogni } x \neq 0}$

def (numeri in virgola mobile)

β intero ≥ 2, m intero ≥ 1

$$F(\beta, m) = \{0\} \cup \{ x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^{\overset{\{0,1\}}{s}} \beta^{\overset{\in \mathbb{Z}}{b}} 0{,}\underbrace{c_1 \dots c_m}_{m \text{ cifre in base } \beta} \}$$

$c_1 \neq 0$

ins dei numeri in VIRGOLA MOBILE e PRECISIONE m, in base β.

Es: $F(10,1)$

- $\frac{1}{100} \in F(10,1)$: $\frac{1}{100} = 10^{-2} = 10^{-1}\, 0{,}1$
- $\frac{11}{100} \notin F(10,1)$: $\frac{11}{100} = 0{,}11 = 10^0\, 0{,}11$ ← frazione non compatibile con precis = 1
- tutti gli elem positivi di $F(10,1)$ con esp zero:

$$\mathcal{B} = \{ 0{,}1 \,;\, 0{,}2 \,;\, \dots \,;\, 0{,}9 \}$$

- tutti quelli con esp $b \in \mathbb{Z}$: $10^b \mathcal{B}$ (positivi), $-10^b \mathcal{B}$ (negativi)

- $F(10,1) = \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} (-1)\, 10^b \mathcal{B} \cup \{0\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} 10^b \mathcal{B}$

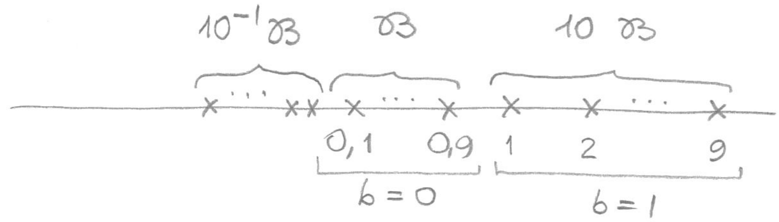
PROPRIETÀ di $F(\beta, m)$

- $\subset \mathbb{Q}$ ($\Rightarrow$ numerabile e ordinato)
- simmetrico risp a zero
- zero è (l'unico) pto di accumulazione
- $\sup F(\beta, m) = +\infty$, $\inf F(\beta, m) = -\infty$

<u>Oss</u> (distanza tra elem consecutivi)

<u>Es</u>: $F(10,1)$

(positivi)



- $b \in \mathbb{Z}$; dist tra elem consecutivi $= 10^b \cdot 0{,}1$
$= 10^b \cdot 10^{-1}$

- in generale: dato $\xi = \beta^b g$ e detto $\sigma(\xi)$ il <u>successore</u> di ξ si ha:

$$\boxed{\sigma(\xi) - \xi = \beta^{b-m}}$$

- la distanza è tanto maggiore quanto l'esp b è grande ($\Rightarrow$ "tanto più ξ è lontano da 0")
- detto β^b l'<u>ordine di grandezza</u> di ξ si ha:

$$\boxed{\frac{\sigma(\xi)-\xi}{\beta^{b}} = \beta^{-m}}$$

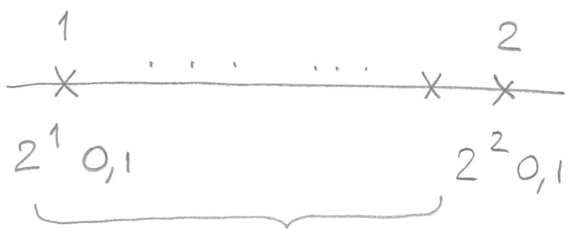
ordine di grandezza

distanza tra elem consecutivi

quantita' <u>indip da ξ</u>: dip solo da base (β) e precisione (m)

<u>Es</u>: Nell' Es finale della Lez precedente, la situazione è

- $\alpha \in (1,2)$
- $F(2,53)$ (comune a SCILAB, OCTAVE, MATLAB)



$b=1 \Rightarrow$ dist $= 2^{1-53} = 2^{-52}$

$\approx 2{,}22 \cdot 10^{-16}$

la procedura di bisez ha trovato l'int (non degenere) più piccolo possibile che contiene lo zero, MA questo int ha misura $> \delta$.

IN PRATICA ... inutile scegliere $\delta < \beta^{b-m}$