

Es:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; utilizza fatt QR di  $A$  per determ soluz di  $Ax=b$  nel senso dei mq

Sol: ep. normali  $\sim Tx = U^T b$

•  $U^T b = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$

•  $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \rightarrow x_2 = \frac{2}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2/3}}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Es:  $P_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_3 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

determ  $x$  che rende min  $F(x_1, x_2) = d(x, P_1)^2 + d(x, P_2)^2 + d(x, P_3)^2$

Sol: ...  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;

- int fisica: config di equilibrio di un pto mobile nel piano collegato da molle con  $P_1, P_2, P_3 \dots$

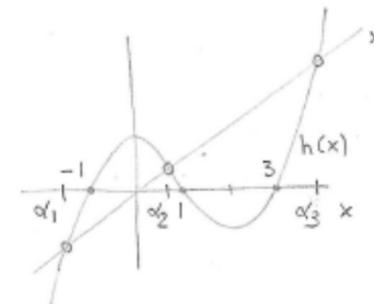
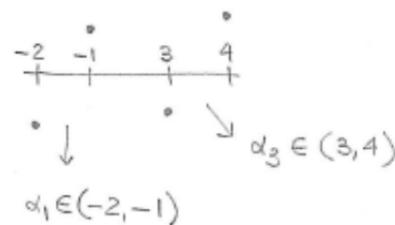
Es (zeri di funzioni):

Sia  $h(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$ ;

- determ il numero di p. unita di  $h$  e separarli;
- per ciascuno dei p. unita, decidere se il mt def da  $h$  sia utilizzabile per l'approssimazione;
- sia  $F(x) = h(x) - x$ ; per ciascuno zero di  $F$  (coincidenti con un pto unita di  $h \dots$ ) decidere se il mt di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione.

• Graficamente:

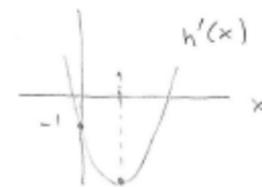
$F(x) = h(x) - x$



3 pti unita:  
 $\alpha_1 < -1$   
 $\alpha_2 \in (0, 1)$   
 $\alpha_3 > 3$

- dal grafico:  $h'(\alpha_1) > 1 \Rightarrow$  metodo NON utilizz
- $h'(\alpha_3) > 1 \Rightarrow$  " " "

$h'(x) = [(x^2-1)(x-3)]' = (x^3 - 3x^2 - x + 3)' = 3x^2 - 6x - 1$



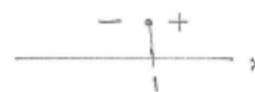
$h''(x) = 6x - 6$   
 $h'(1) = -4$

$\forall x \in (0, 1), h'(x) < -1 \Rightarrow h'(\alpha_2) < -1 \Rightarrow$  metodo NON utilizz.

- $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $F'(\alpha_1) = h'(\alpha_1) - 1 > 0 \Rightarrow$  Newt utilizzabile!
- $F'(\alpha_2) = h'(\alpha_2) - 1 < 0 \Rightarrow$  Newt utilizz!

$F'(\alpha_3) = h'(\alpha_3) - 1 > 0 \Rightarrow$  Newt utilizz!

Oss:  $F''(x) = h''(x) = 6x - 6$



$\Rightarrow F''(\alpha_1) < 0$   
 $F''(\alpha_2) < 0$   
 $F''(\alpha_3) > 0$

È utilizz il criterio di scelta del pto iniziale

Es (interpolazione): Si vuole det il grafico di  $f(x) = \sin x^2$  su  $[-10, 10]$ , con err assoluto  $\leq 1/80$ , utilizzi l'istr plot  $(x, f(x))$  con suddiv un'forme dell'int. Determina un numero suff di sottointervalli.

•  $x = (x_1, \dots, x_m)$  con  $x_j = -10 + \frac{20}{m-1}(j-1)$ ,  $j = 1, \dots, m$

debiamo scegliere  $m$  che garantisce  $e(f) \leq \frac{1}{80}$

(si ricordi che plot  $(x, y)$  disegna il grafico dell'unica  $f$  cont lin a tratto che int i dati  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ )

•  $f \in C^2([-10, 10], \mathbb{R})$ ,  $e(f) \leq \frac{M_2}{8} h^2$

con  $M_2 = \max_{[-10, 10]} |f''(x)|$ ,  $h = \frac{20}{m}$

•  $f'(x) = 2x \cos x^2$ ,  $f''(x) = 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$

$|f''(x)| \leq 2 + 4x^2 \Rightarrow M_2 \leq 402$

• cerco  $h$  t.c:  $\frac{402}{8} h^2 \leq \frac{1}{80} \sim h^2 \leq \frac{1}{4020} \sim h \leq \frac{1}{63,4\dots}$

• valore di  $h$  suff:  $\frac{1}{64} \Rightarrow \frac{20}{m-1} = \frac{1}{64} \sim \boxed{m = 64 \cdot 20 + 1 = 1281}$

Oss.:  $\sin(x^2) = \text{rd}(\sin(\text{rd}(\xi^2)))$ ,  $\xi = \text{rd}(x)$

$$\boxed{x \rightarrow \xi = \text{rd}(x) \rightarrow \xi \otimes \xi = \text{rd}(\xi^2) \rightarrow \sin(\xi \otimes \xi) = \text{rd}[\sin(\text{rd}(\xi^2))]}$$

•  $\xi = (1 + \epsilon_1)x$ ,  $|\epsilon_1| \leq u$

•  $\text{rd}(\xi^2) = (1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_1)^2 x^2 = (1 + \theta_3)x^2$

$\theta_3 = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots \Rightarrow |\theta_3| \leq 3u + \dots \approx 3u$

•  $\sin((1 + \theta_3)x^2) = \sin x^2 + \delta$

$\delta = \sin((1 + \theta_3)x^2) - \sin x^2 \approx (\cos x^2) \theta_3 x^2$

$$\boxed{f(y+h) \approx f(y) + f'(y)h}$$

$\Rightarrow |\delta| \leq 3x^2 u + \dots \leq 300u \ll \frac{1}{80}$