Es: $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$, $v = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ (ps canonico in V)

- W è un piano: determ eq cartesiana;
- determ $v^*$, proiez ortogonale di $v$ su $W$;
- posto $A = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$, determ $A^+$.

Sol: • si cercano gli $x \in \mathbb{R}^3$ t.c. i vett $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, x$ sono lin dip, ovvero t.c. $\det \begin{bmatrix}1&0&x_1\\1&1&x_2\\0&1&x_3\end{bmatrix} = 0$

Poiché $\begin{bmatrix}1&0&x_1\\1&1&x_2\\0&1&x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&x_1\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_2+x_1\end{bmatrix}$ (fatt LR determ con EG)

si ha: $\boxed{x_3 - x_2 + x_1 = 0}$

- Le coord di $v^*$ risp a $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ si determinano come soluz nel senso dei min quadr del sist:

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

ovvero come soluz delle eq.ni normali: $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,

sist. equivalenti: $\begin{bmatrix}2&1\\0&-3\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad v^* = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

- $A^TA = \begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\1/2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&3/2\end{bmatrix}$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix}1/2&-1/3\\0&2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1/2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/3&-1/3\\-1/3&2/3\end{bmatrix}$$

$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix}2/3&1/3&-1/3\\-1/3&1/3&2/3\end{bmatrix}$ ; $A^+b = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\end{pmatrix}$, come doveva

def (funz che meglio approssima i dati nel senso dei m.q.)

dati: $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$, $G$ s.s.v di $C([a,b], \mathbb{R})$ di dim finita;

> $g \in G$ è un elem di $G$ che meglio approssima i dati nel senso dei m.q se:
>
> $\forall \tilde{g} \in G, \quad (\tilde{g}(x_0) - y_0)^2 + \dots + (\tilde{g}(x_k) - y_k)^2 \geq (g(x_0) - y_0)^2 + \dots + (g(x_k) - y_k)^2$

Es: determ gli elem di $P_1(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati $(-1,0), (0,0), (1,1)$ nel senso dei m.q.

Sol: $P_1(\mathbb{R}) = \langle 1, x \rangle$ ; $p(x) = a_0 + a_1 x$

$$(p(-1)-0)^2 + (p(0)-0)^2 + (p(1)-1)^2 = \left\| \begin{bmatrix}p(-1)\\p(0)\\p(1)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\|^2 =$$

(norma ottenuta da ps canonico in $\mathbb{R}^3$)

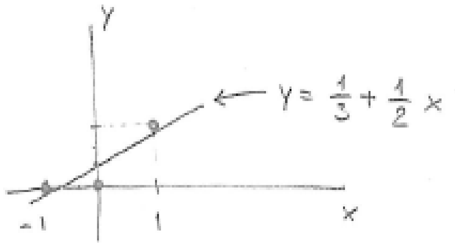
$$= \left\| \begin{bmatrix}a_0 + a_1(-1)\\a_0 + a_1(0)\\a_0 + a_1(1)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| a_0 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\|^2$$

ovvero, posto $A = \begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$: $= \left\| A \begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix} - b \right\|^2$

I coeff $a_0, a_1$ che individuano gli elem di $P_1(\mathbb{R})$ cercati sono q.li le soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei min quadr.

Si ottiene: $\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow a_0 = 1/3, \ a_1 = 1/2$

e l'unico elem che soddisfa le richieste è $\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x}$




**Es**: determ gli elem di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati

$(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,1)$

nel senso dei min quadr.

---

**Es** (fatt QR, caso rettangolare):

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; fatt QR di A è $(U, T)$ t.c.

- $U \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ a colonne ortonormali risp ps canonico in $\mathbb{R}^3$
- $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tr sup
- $A = UT$

Si determina come nel caso quadrato...:

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix}$$

**Oss**: $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ a colonne lin indip, $b \in \mathbb{R}^n$; $U, T$ fatt QR di A.

- colonne di A lin indip $\Rightarrow$ T invertibile (dim: per ass.)
- eq normali per il sist $Ax = b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A^TA = T^TU^TUT = T^TT \\ A^Tb = T^TU^Tb \end{array} \right. \quad \Bigg| \quad T^TTx = T^TU^Tb$$

MA $T^T$ invertibile $\Rightarrow$ $\boxed{Tx = U^Tb}$

- si ha: $\mu_2(A^TA) = (\mu_2(T))^2$ [dim: no]

OVVERO: i sist $A^TAx = A^Tb$ (eq normali)

e $Tx = U^Tb$

sono equivalenti, ma la matrice del secondo (è triangolare ed) ha numero di condizionamento (quasi) sempre minore del primo!

**Es**: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; utilizz fatt QR di A per determ soluz di $Ax = b$ nel senso dei mq

**Sol**: eq. normali $\sim$ $Tx = U^Tb$

- $U^Tb = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \rightarrow x_2 = 2/3, \quad x_1 = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2}/3}{\sqrt{2}} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$