(B) ricostr con f cont lin a tratti :

base di S ...

$$|r(\delta)| = |\delta_0 s_0(t) + \dots + \delta_k s_k(t)|$$

$$\leq |\delta_0|\,|s_0(t)| + \dots + |\delta_k|\,|s_k(t)| \leq \max\{|\delta_0|, \dots, |\delta_k|\}$$

$$\boxed{|s_0(t)| + \dots + |s_k(t)| = s_0(t) + \dots + s_k(t) = 1}$$

OVVERO : Nel caso di ricostr con int polinomiale il condiz è tanto peggiore quanto più k è grande;

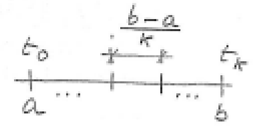
nel caso di ricostr con f cont lin a tratti il condiz è sempre buono.

Es (appross numerica di integrali):

dati : $[a,b] \subset \mathbb{R}$; $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$

determ $\int_a^b f(t)\,dt$ $\quad \left[\text{Es}: \int_0^1 e^{-t^2} dt \right]$

- k int ≥ 1, $\quad x_j = a + \frac{b-a}{k} j$, $\quad j = 0, \dots, k$



- r f di ricostr con f cont lin a tratti su $I_1 = [x_0, x_1], \dots, I_k = [x_{k-1}, x_k]$
- $s(x) = r(c(f))(x) = f(x_0)s_0(x) + \dots + f(x_k)s_k(x)$
- $e(f) = \max\limits_{[a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{M_2}{8}\left(\frac{b-a}{k}\right)^2$
- $I = \int_a^b f(t)\,dt$, $\quad J_k = \int_a^b s(t)\,dt$

$$\Rightarrow |I - J_k| = \left| \int_a^b (f(t) - s(t))\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - s(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b \max_{[a,b]} |f(t) - s(t)|\,dt = (b-a) \max_{[a,b]} |f(x) - s(x)|$$

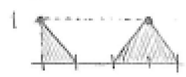
$$\leq \frac{M_2}{8} \frac{(b-a)^3}{k^2}$$

$$\boxed{\text{Oss}: \forall \delta > 0, \exists k \text{ t.c. } |I - J_k| < \delta}$$

- $J_k = \int_a^b s(t)\,dt = \int_a^b \big(f(x_0)s_0(t) + \dots + f(x_k)s_k(t)\big)\,dt$

$$= f(x_0)\int_a^b s_0(t)\,dt + \dots + f(x_k)\int_a^b s_k(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{k}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + \frac{1}{2}f(x_k)\right]}_{\text{calcolo "elementare"!}}$$

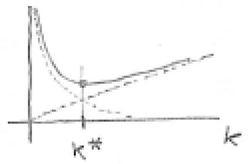


$$\int_a^b s_n(t) = \begin{cases} \frac{b-a}{2k} & s = 0, k \\ \frac{b-a}{k} & 0 < n < k \end{cases}$$

$$\boxed{\bullet \text{ Si approssima } I \text{ con } J_k, \text{ scegliendo } k \text{ suff grande.}}$$

Oss: Φ_k funz utilizz dal calc per approx J_k;

- $|I-\Phi_k| = |I - J_k + J_k - \Phi_k| \le \underbrace{|I-J_k|}_{\int \approx \Sigma} + \underbrace{|J_k-\Phi_k|}_{\Sigma \approx \oplus \cdots \oplus}$
- $|I-J_k| = \dfrac{c}{k^2}$
- $|J_k-\Phi_k| = c'k$ SE "tutto va bene"

$\Rightarrow$ 

$\exists\, k^*$ che rende minimo $\dfrac{c}{k^2} + c'k$

Es (grafico di f):

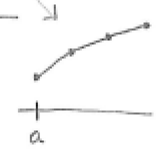
dati: $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$

determ il grafico di f su $[a,b]$.

- k int ≥ 1, $x_j = a + \frac{b-a}{k} j$, $j = 0,\dots,k$; r f di ricostr con f cont...
- $x = (x_0,\dots,x_k)^T$, $F = c(f) = (f(x_0),\dots,f(x_k))^T$
- > plot (x, F)

produce:

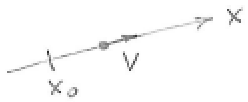
grafico di $r(c(f))$

ingrandimento: 

- Pb: come scegliere k?

4 APPROSSIMAZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI

Es: punto materiale che si muove di MOTO UNIFORME su una retta, con velocità V e posizione x_0 per $t=0$



Pb: risultati di misure...

$x(1) = 1$
$x(2) = 1{,}5$
$x(4) = 2{,}4$

determ V e x_0

Soluz: moto uniforme $\Rightarrow$ $x(t) = x_0 + Vt \in \langle 1, t \rangle$

Cerchiamo α_0, α_1 t.c. $\alpha_0 + \alpha_1 t$ int i dati ...

$\Rightarrow$ α_0, α_1 soluz di: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2{,}4 \end{bmatrix}$ $(A\alpha = b)$ SISTEMA INCOMPATIBILE

- Ragionevole perché dati ottenuti da misure...
- RIPIEGO: cerco α_0, α_1 che "minimizza l'errore" ... $A\alpha - b$

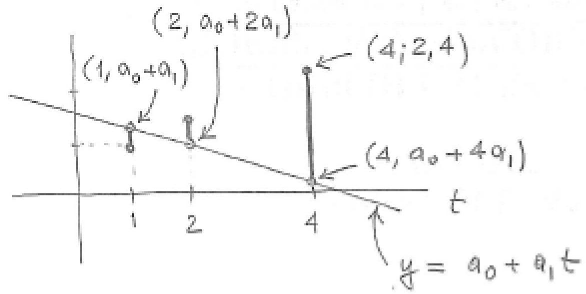
def: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n > m$, $b \in \mathbb{R}^n$;

$v \in \mathbb{R}^m$ SOLUZIONE di $Ax=b$ NEL SENSO DEI MINIMI QUADRATI se $\forall w \in \mathbb{R}^m$, $\|Aw-b\|_2 \geq \|Av-b\|_2$ (ovvero: $\|\cdots\|_2^2 \geq \|\cdots\|_2^2$)

Oss: $x^* \in \mathbb{R}^m$ è SOLUZIONE di $Ax=b$ significa $Ax^*-b=0$;

dunque: $\boxed{\text{SOLUZIONE} \Rightarrow \text{SOLUZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI}}$

Es (continua, int geom dell'errore $A\alpha - b$)



- le componenti del vettore $A\alpha - b$ sono, a parte il segno, le lunghezze dei segmenti marcati in figura; tra tutte le rette si cercano quelle che rendono minime le somme dei quadrati delle lunghezze.