

Pb (lineare di interp)

dati • $[a,b], k; \mathcal{F}; L_0, \dots, L_k: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; y_0, \dots, y_k$

determ • $f \in \mathcal{F}$ t.c. $L_0(f) = y_0, \dots, L_k(f) = y_k$

Es: (I) Pb interp polinomiale;

(II) determ $x \in \mathcal{C}^2$ t.c. $\begin{cases} x'' + x' = 0 \\ x(0) = x_0, x'(0) = x'_0 \end{cases} \quad (x_0, x'_0 \in \mathbb{R})$

- $[a,b] = \mathbb{R}, k=1;$
- $\mathcal{F} = \{v \in \mathcal{C}^2 \text{ t.c. } v'' + v' = 0\} = \langle 1, e^{-t} \rangle \quad (\dim \mathcal{F} = 2)$
- $L_0: f \rightarrow f(0), L_1: f \rightarrow f'(0)$ (sono lineari)
- $y_0 = x_0, y_1 = x'_0$

(Soluz: ...)

(III) determ $x \in \mathcal{C}^2$ t.c. $\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0, x(2\pi) = 0 \end{cases}$

- $[a,b] = \mathbb{R}, k=1;$
- $\mathcal{F} = \{ \dots \} = \langle \sin t, \cos t \rangle$
- $L_0: f \rightarrow f(0), L_1: f \rightarrow f(2\pi)$
- $y_0 = 0, y_1 = 0$

(Soluz: ...)

Oss: in generale: • $\mathcal{F} = \langle f_1(t), \dots, f_j(t) \rangle$

• $L_0(f) = y_0, \dots, L_k(f) = y_k$ equiv a $(f(t) = a_1 f_1(t) + \dots + a_j f_j(t))$

$$\begin{bmatrix} L_0(f_1) & \dots & L_0(f_j) \\ \vdots & & \vdots \\ L_k(f_1) & \dots & L_k(f_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \quad (*)$$

- se f_1, \dots, f_j base di \mathcal{F} , le corrisp soluz pb lin interp \Leftrightarrow soluz sist lin (*) e' biunivoca.

Es (per casa): determ $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ che verifcano le condiz: $p(1) = 2, \int_0^6 p(x) dx = 0$

Sol: $\{(3+9t) - (1+11t)x + 2tx^2, t \in \mathbb{R}\}$

• CAMPIONAMENTO e RICOSTRUZIONE

def (f. di camp, f. di ricostruz):

dati k intero $\geq 0; [a,b]$ int non deg, $\overbrace{t_0, \dots, t_k}^{\text{distinti}} \in [a,b]$

• $c: \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ t.c. $c(f) = (f(t_0), \dots, f(t_k))^T$

↑ FUNZ di CAMPIONAMENTO (agli istanti t_0, \dots, t_k)
 ↖ ISTANTI di CAMPIONAMENTO

Oss: c e' lineare e non invertibile

$$\left[\exists f_1 \neq f_2 \text{ t.c. } c(f_1) = c(f_2) \right]$$

• $r: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

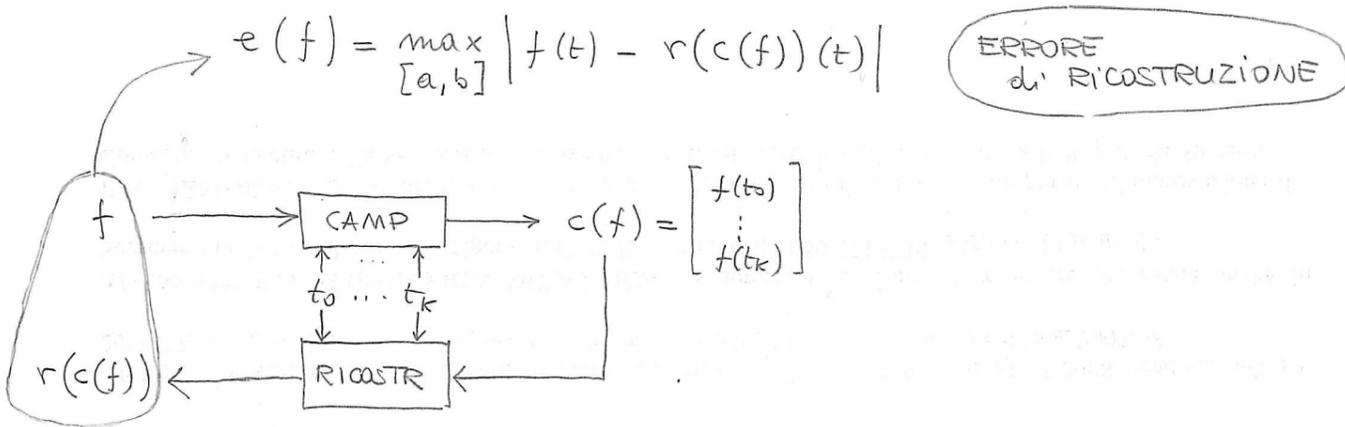
FUNZ di RICOSTRUZ (rel a c) \textcircled{SE} $\left\{ \begin{array}{l} \text{lineare} \\ \forall y \in \mathbb{R}^{k+1}, c(r(y)) = y \end{array} \right.$

Es (ricostruz mediante interp poli):

$r: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ t.c. $r: \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \rightarrow$ l'elem di $\mathcal{P}_k(\mathbb{R})$ che int i dati $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$

- r e' f. di ricostruz rel a c
 (dim: ...)

def (erro di ricostruzione): $[a, b]$ int non degenere;
 t_0, \dots, t_k ist di camp; c f di camp; r f di ricostruz
 $e: C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.



TEO (errore di ricostr stell' int polinomiali)

k int ≥ 0 ; $t_0, \dots, t_k \in [a, b]$, distinti;
 $f \in C^{k+1}([a, b], \mathbb{R})$; $p_k \in P_k(\mathbb{R})$ che int i dati $(t_j, f(t_j))$

$\forall t \in [a, b], \exists \theta \in [a, b]$ t.c.

$$f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} (t-t_0) \dots (t-t_k)$$

(dim: no.)