Es (continua):

- EGPP ... $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $S(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$, $D(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

  con $c_\infty(D(\gamma)) = 1$

In generale, con EGPP si ottiene $\boxed{c(D) \le n 2^n c(A}$

le matr D può avere condiz pegg di A, ma non "arbitrariam peggi

Oss:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & \boxed{QR} \arrow[r] & U,T \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{SI} \arrow[r] & x^* \\
b \arrow[rr] & & \boxed{*} \arrow[r] & c \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

in $\mathbb{R}$

in M

$$\begin{tikzcd}
\hat{A} \arrow[r] & \boxed{\widehat{QR}} \arrow[r] & \hat{U},\hat{T} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\widehat{SI}} \arrow[r] & \hat{x} \\
\hat{b} \arrow[rr] & & \boxed{\hat{*}} \arrow[r] & \hat{c} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$\hat{x} = \widehat{SI}(\hat{T}, \hat{c})$, $x^* = SI(T, c)$, $\tilde{x} = SI(\hat{T}, \hat{c})$ etc

Teo condiz $\Rightarrow$
- $\epsilon_d \le c(T)\, \epsilon_T \quad (\epsilon_c = 0)$
- $\hat{\epsilon}_d \le c(T)\, \epsilon_c \quad (\epsilon_T = 0)$

$\epsilon_T = \dfrac{\|\hat{T} - T\|}{\|T\|}$

$\Rightarrow$ occorre studiare $c(T)$!

Oss: $(\mathbb{R}^n, N_2)$ • $T = U^T A \Rightarrow \|T\|_2 \le \|A\|_2$

Oss: sussiste il seguente

TEO: $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ottenuto dalla procedura

(I) $(\hat{S}, \hat{D}) = \widehat{EG}(A)$

(II) $\hat{c} = \widehat{SA}(\hat{S}, b)$

(III) $\hat{x} = \widehat{SI}(\hat{D}, \hat{c})$

Allora: $\exists\, \delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- $\|\delta A\| \le n u \|\hat{S}\| \|\hat{D}\|$ (u precis di macch)
- $(A + \delta A)\hat{x} = b$

ovvero: $\hat{x}$ è la soluzione calcolata op in $\mathbb{R}$ di un sistema di eq ottenuto perturbando "poco" la matrice del sist originario.

Oss (sist fisico): se il sist $Ax=b$ ha origine fisica, i dati A e b sono affetti da errore; se $\delta A \approx$ errore di origine fisica, allora $\hat{x}$ è "fisicamente significativo"!

- COSTO

def (costo aritmetico): # pseudo-op eseguite per portare a termine la proc.

Oss: (1) confronti a "costo zero": ragionevole se pochi
(Es: $x \in \mathbb{R}^n$, per calcolare $\|x\|_\infty$ # confronti non trasc!)

(2) costo di ciascuna pseudo-op indip da operandi (FALSO se esponenti non limitato! MA nei casi si ha $-1021 \le b \le 1024$ ...)

Es: ① $\phi_1(a,b) = a_1 \overset{1}{\otimes} b_1 \overset{n+1}{\oplus} \cdots \overset{2n-1}{\oplus} a_n \overset{n}{\otimes} b_n \approx a^T b$

costo $\phi_1 = n P + (n-1) S = (2n-1)$ flops $\approx 2n$ flops

② $\phi_2(A,b) = (\phi_1(\hat{a}_1, b), \dots, \phi_1(\hat{a}_n, b))^T \approx A b$ $[\hat{a}_k$: k-esima riga di A$]$

costo $\phi_2 = n^2 P + n(n-1) S = (2n^2 - n)$ flops $\approx 2n^2$ flops

Oss: Se A è tr si ha ($\xi \otimes 0 = 0$, $\xi \oplus 0 = \xi$):

costo 1ª componenti = 1P + 0S

" 2ª " = 2P + 1S

etc ... costo $\phi_2^{tr} = \frac{n(n+1)}{2} P + \frac{(n-1)n}{2} S = n^2$ flops

③ $\phi_3(T,c) = \widehat{SI}(T,c) \approx SI(T,c)$

costo $\phi_3 = n D + \frac{n(n-1)}{2} (P+S) = n^2$ flops

> Oss: risolvere un sist di ap con matrice tr costa tanto quanto verificare se x è soluzione ...

④ $\phi_4(A) = \widehat{EG}(A) \approx EG(A)$

costo $\phi_4 = \frac{n^2+n}{2} D + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} (P+S)$

$= \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6}$ flops $\approx \frac{2}{3} n^3$

⑤ $\phi_5(A,b)$ = soluz sist con $\widehat{EG}$ $\approx$ soluz sist con EG

costo ϕ_5 = costo ϕ_4 + 2 costo ϕ_3 $\approx \frac{2}{3} n^3$

⑥ $\phi_6(A) = \widehat{qr}(A) \approx qr(A)$

costo $\phi_6 \approx \frac{4}{3} n^3$

$\Rightarrow$ costo soluz sist con $\widehat{qr}$ $\approx \boxed{\frac{4}{3} n^3}$

> Oss: la soluz con qr costa (circa) il doppio rispetto a quella con EG.