Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; EGP non def in A!

TEO (ris def EGP): $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

EGP def in A $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_{n-1}$ lin indip

(dim: no)

Oss (uso EG/EGP per soluz sist): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$;

- (1) $(S, D) = EG(A)$
  (2) $c = SA(S, b)$
  (3) $x = SI(D, c)$

  procedura NON SODDISFACENTE, in generale: SE passo (1) ok, ALLORA trova $x \Leftrightarrow A$ invert; MA passo (1) può fallire anche se A invert!

- (1) $(P; S, D) = EGP(A)$
  (2) $c = SA(S, Pb)$
  (3) $x = SI(D, c)$

  procedura SODDISFACENTE:
  - passo (1) può fallire solo se A non invert

  SE A invert, TROVA soluz
  SE A non invert, si ARRESTA

Oss (unicità EGP): $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(A) $P_1 = P(1,2), \dots$
(B) $P_1 = P(1,3), \dots$

Es: completare EGP e confrontare i fattori ottenuti.

- FATTORIZZAZIONE QR

def: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $U, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c. ...

Es (procedim di calcolo): $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

PASSO 1: determ $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a colonne ortogonali e $\theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ t.c. $\Omega\theta = A$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \omega_1 \theta_{12} + \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \omega_1 \theta_{13} + \omega_2 \theta_{23} + \omega_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\omega_1 = \dots$

$\theta_{12} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \omega_1}{\|\omega_1\|^2}$, $\omega_2 = \dots$

$\theta_{13} = \dfrac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_1}{\|\omega_1\|^2}$, $\theta_{23} = \dfrac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_2}{\|\omega_2\|^2}$, $\omega_3 = \dots$

PASSO 2: $W = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|, \|\omega_3\|)$

- ΩW^{-1} è ortogonale
- $W\theta$ è tr sup
- $(\Omega W^{-1})(W\theta) = A$

quindi: $\boxed{U = \Omega W^{-1},\ T = W\theta \text{ è fatt QR di } A}$

Oss (analogia con proc ortonorm Gram-Schmidt):